数理物理シリーズ

フォック空間と量子場［上］

新井朝雄 著

日本評論社

●

[編集]

荒木不二洋

江沢 洋

数理物理シリーズの刊行にあたって

「数理物理シリーズ」の刊行にあたり，数理物理学とは何かを説明し，シリーズの意図を明かにしておきたい．

物理学は自然の構造と仕組みを見極めようとする．これに対して数学は客観的な知識を目的とするあらゆる科学の理論を，簡単かつ厳密に表現する最上の記述形式を与えるものである．秋月康夫は『現代数学概観』(筑摩書房，1970) において「数学は元来，無限を対象とするもので，経験では得られない超限的な理論だ」ということを強調した．物理は，それを利用している．たとえば速度として測定できるのは有限時間 Δt におこる変位 Δx であるが，数学は極限 $\lim_{\Delta t\to 0} \Delta x/\Delta t$ を発明し，それによって Δt の選択によらない客観性を実現した．力学は，これに負うところが大きい．相転移の統計力学も無限系を考えることで明確に定式化される．

物理学と数学との接点に数理物理学はある．英語でいうと mathematical physics だ．物理数学というものもあるが，これは mathematical methods for physics だろう．

ロシアの R. L. Dobrushin は，統計力学を確率論的に深めた多くの著しい業績をもつが,「仕事は何か」と問われて「応用数学を純粋数学にすること」と答えたとか．これにならって，数理物理学とは物理に用いられた数学を純粋数学にすることだ，といってもよさそうだ．

かつて山内恭彦は，著書『物理数学』(岩波書店，1963) の序文にこう書いた：

> 科学の進歩に応じて，その理論を表すのに適当な数学が要求され，ときに未熟な形で科学者に考案されて ··· まだ数学になり切っていない昆虫の幼虫みたいな時期のものがある．それは科学者からみると本質的の部分は間違いなく取り入れられていると思われるのであるが，数学者からみると甚だあやしげなものである．

山内は，これを数学に対する大きな栄養源であるとしつつ，その生の形を提示することが物理の学生には数学の理解に役立つと考えたのである．この見解の背景には，自らも開拓に参加した群論の量子力学への応用があり，また P. A. M. Dirac が量子

力学の表記に用いた δ 関数を L. Schwartz が超関数として数学的に脱皮させたこと (1945) の衝撃がまだ生々しかったということがあるだろう．山内の近くでは佐藤幹夫がハイパー・ファンクションの理論を生みだしていた (1958)．後年，これは局所解析の理論として開花し，物理との交渉を一層つよめることになる．

物理学，あるいは広く科学の側からみても，その理論の表現を未熟な形に残すのは本意ではない．たとえば，量子力学で用いられる摂動級数は収束するのか，散乱問題の波動関数は時間 $t \to \infty$ でどう振る舞うのかなど，だれでも気になることである．これも山内の近くで，加藤敏夫は J. von Neumann 作の『量子力学の数学的基礎』という額縁に細密画を描き入れはじめ，それは世界的に大きな潮流をよびおこすにいたった．

場の量子論では，発散の困難に促された数学的な分析が A. S. Wightmann や R. Haag らによって 1950 年前後からはじめられた．彼らは数学的な注意深さなしには一歩も前進できないと考えたのである．その努力の中で物理的にも興味ふかい多くの数学的現象が次々に発見された．それは量子力学の定式化に反省を促したばかりでなく，今日では無限自由度の多体問題，統計力学をとおして物性物理にも波及している．

Dobrushin のいう「純粋数学にすること」は，単に数学のためばかりではないのである．

こうして，数理物理学の発展は始まった．上の例は量子力学の方面に偏っているが，ほかにも相対論あり，非線型問題ありで及ぶところは広くかつ深い．最近では，わが国でも物理学者の関心が高まり，数学者の参加も急増している．

しかし，新興分野の常として，これから勉強をはじめる学生や他分野の研究者がこれについて知ろうとすると，すぐ読める教科書がなく，個々のトピックスについて専門誌から探し集めた断片的な情報を自己流にまとめるほかない．

この「数理物理シリーズ」は，このような状況に応えるために企画した．研究の第一線につながる入門書を提供し，さらには数理物理学の動きを生き生きとした姿で広い層に伝えたい．

この目的のためには，シリーズ全体としても，また一冊一冊においても，基礎的な部分のわかりやすい解説と，主題の雰囲気を伝える中心的な概念構成や理論の展開，その分野の展望とその中での位置づけなど，いろいろの要素がバランスよく混ざっていることが望ましい．それを読みやすい長さにまとめるには，題材の選択も必要となろうし，証明や説明にも，細部にこだわらず本質を突くわかりやすさを狙った工夫が必要になることも多かろう．細部まで完全なていねいな説明が望まれる場合には，躊

躇しない．

このシリーズは，物理学の人には数学を，数学の人には物理を近づきやすくするものでなければならない．物理の理論の数学的展開はもとより，数理物理学でよく使われる数学や，物理学に触発されて進展した数学のトピックスも取り入れて，物理と数学が有機的に混じり合ったものにしたい．山内のいう「昆虫の幼虫」も，それとわかる形にすれば入れてよいだろう．理論の発展史も役に立つだろう．物理の理論の新展開に数学の側からの自由なコメントを組み合わせて一冊とすることも試みたい．

こうして,「数理物理シリーズ」は，基礎的なテーマに時の話題を加えて，特に若い人々の興味をかきたて，物理と数学の両方の人々の役に立つようなものに育ててゆきたい．このシリーズに終わりはない．物理，数学にも数理物理にも終わりはないはずだから．

御声援を心からお願いする．

1998 年 4 月

編者/荒木不二洋 (東京理科大学)
江沢 洋 (学習院大学)

まえがき

量子場は，物質の極微の構成要素である素粒子の本性を原理的に記述するための数学的対象として考案された．いまからおよそ 70 年前のことである．量子場を根本的な概念として構想される理論 = 場の量子論は，相互作用をしない素粒子を記述する自由場の理論の範疇においては，素粒子の波動像と粒子像を見事に統一的に記述するものとして成功をおさめた．だが，相互作用をする素粒子たちによってひきおこされる現象に場の量子論を適用すると“発散の困難”とよばれる深刻な事態に遭遇した．これは，換言すれば，素粒子の相互作用を記述する量子場が実際に数学的に存在するかどうかという問題にほかならなかった．この問題は，1950 年代からはじまる，場の量子論の数学的に厳密な研究の主要な動機のひとつとなる．このようにして開始された，量子場に関わる数学の研究は，現代の数理物理学・物理数学の大きな潮流のひとつを形成するにいたった．場の量子論における数学的諸問題の研究から多くの興味深い数学理論が生まれ，互いに刺激しあいながら，いろいろな方向へと発展してきている．こうした発展は，量子場という理念が内蔵する数理の豊かさを示すとともに，場の量子論が数学のほとんどすべての領域と陰に陽に関連していることをうかがわせる．本書は，そのような，なかなかとらえ難いけれどもたいへん魅力的な量子場という対象に関わる数学的理論の一部を初学者向けに叙述し，解説したものである．

量子場の構造や性質を数学的に厳密な仕方で研究する方法には大きく分けて 2 つある．公理論的方法と構成的方法である．前者は量子場に関して，いくつかの基本的な性質を公理系として設定し，そこから何が導出されるかを見極めようとする．この方法は，量子場の個々のモデルによらない一般的な性質の解析に有効である．他方，後者は，量子場の個々のモデルを実際に構成することによってその存在を証明するとともに，構成されたモデルの数学的・物理的諸性質を明らかにしようとするものである．だが，この分け方は便宜的なものにすぎず，実際には，公理論的方法と構成的方法は互いに補完しあうものである．むしろ，これら 2 つの方法を補完的に用いることにより，より高く，深く，広い認識が達成される．

場の量子論の公理論的方法に関する入門書は優れたものがすでにいくつか出版さ

れている．だが，構成的方法については，有限自由度の (非相対論的) 量子力学の数学理論の標準的な部分を学んだ人が，それほど難なく，引き続いて読むことができ，かつ現在進行中の研究へ入ってゆくことが可能であるように組織だてて書かれた入門書はまだないように見える．本書はそのような書物のひとつたらんことを目指すものである．本書を読むためには拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) と同程度の知識があればよい．実際，本書は，この前著の続編のひとつとみなされるべきものである．本書は基本的に独習書として書かれているが，もちろん，セミナーや講義のテキストとして使うことも可能である．

本書の構成について若干述べておきたい．本書は 2 巻に分かれている．第 1 巻 — 序章から 6 章まで — の目的は，序章を除いて，量子場の数学の中心的理念のひとつをなすフォック空間の理論を詳述することである．フォック空間というのは或る型のヒルベルト空間であって，その最初の具象的形態は，ロシアの理論物理学者 V. A. フォックによって 1932 年に導入された．フォック空間は，場の量子論の文脈では，無限個の素粒子からなる系の状態ベクトルの空間を記述するために使われる．素粒子には，ボソン (ボース粒子) とフェルミオン (フェルミ粒子) という 2 種類の族がある (詳しくは 4 章 4-1 節を参照)．これに対応して，フォック空間には基本的に 3 種類ある．同種のボソンからなる系の状態ベクトルの空間を記述するフォック空間はボソンフォック空間とよばれ，同種のフェルミオンからなる系の状態ベクトルの空間を記述するフォック空間はフェルミオンフォック空間とよばれる．さらに，同種のボソンと同種のフェルミオンからなる系の状態ベクトルを記述するヒルベルト空間として，ボソン-フェルミオンフォック空間がある．

序章は「量子場がいかなるものであるか，あるいは，あるべきか」についてのおおまかな観念を読者に提示するとともに量子場に関わる数学的諸問題を概観することを目的としている．この中には，フォック空間の理論への動機づけも含まれている．序章の叙述は，したがって，多くの物理の教科書と同様，形式的・発見法的であり，数学的に厳密ではない．この点は，まず，お断りしておかなければならない (ただし，古典場の理論に関する部分は容易に厳密化可能である)．言うまでもなく，数学的に厳密に証明されない事柄は真理として認めることはできない．だが，量子場の数理物理学に限らず，現代的な厳密な数理物理学あるいは物理数学を研究しようとするならば，この種の形式的・発見法的議論も — それが数学的に厳密でないことを明晰に意識しつつ — てきぱきとできることが望まれる．

1 章から 6 章までは，第 2 巻への応用を念頭におきつつも，それ自体，純粋に数学の理論として読めるように書いた．しかも，可能な限り，一般的・抽象的な形で理

論展開をおこなった．こうすることにより，より高次の普遍的な数学的構造があらわにされ，フォック空間が属する数学的理念界の領域を透徹した明晰な認識のもとに俯瞰することが可能となる．これは美的な意味でも人を深く満足させうるものであると思う．しかも，こうした認識方法は応用上も極めて強い力となりうる．なぜなら，真の抽象は，事物の本質あるいは存在の源泉へと“遡行” する方法だからである．

なお，6 章は著者の創始になる理論 — ボソン-フェルミオンフォック空間上の Dirac 作用素の理論 — の解説であり，本の一部として，叙述されるのはこれが初めてである．

第 2 巻では，第 1 巻の理論の応用編としての量子場の理論を叙述する．公理論的方法の短い叙述である 7 章 (量子場の一般論) を除いて，量子場の個々のモデルを構成し，その基本的性質を論じる．8 章から 11 章にわたって，自由場のクラスに属する量子場を全部で 4 種類構成する：(i) de Broglie 場 — 非相対論的物質場 (8 章)；(ii) Klein-Gordon 場 — 相対論的スカラー場 (9 章)；(iii) 電磁場 (10 章)；(iv) Dirac 場 — 相対論的スピノル場 (11 章).

はじめに述べたように，自由場は相互作用をする素粒子を記述するものではない．相互作用を記述するモデルの論述は 12 章，13 章でなされる．12 章では，van Hove モデルとよばれるモデルを扱う．これは，相互作用をもつ量子場の雛形(ひながた)として，多くの研究者によって，すでによく解析されているモデルである．しかし，本書では，このモデルを抽象的な形で論じ，モデルの普遍的構造を明るみに出した．さらに，質量 0 の素粒子に関わる赤外発散の問題を詳しく論じたのも新しい点である．13 章は，複数の非相対論的量子的粒子と量子場が相互作用をする系のモデルの構成と解析に関するものである．ここでは，この分野の最新の研究に直結する内容が論じられている．

はじめの計画では，6 章 (ボソン-フェルミオンフォック空間) の応用として，超対称性 — ボソンとフェルミオンの入れ換えに関する対称性 — をもつ量子場の理論，すなわち，超対称的場の量子論の数学的構成も論じる予定であったが，これは，紙数の都合上，割愛せざるをえなくなった．それゆえ，6 章は，本書を通読する上では，最後にまわすことも可能である．

本書を自己完結的にするために — 読者が他の本を参照しなくても，本書の基本的内容を理解し通読できるように — 付録をつけた．付録 A ～ C と E には，ヒルベルト空間と自己共役作用素の理論に関わる，いくつかの基本的な事柄をまとめ，付録 D では緩増加超関数の理論の要項を叙述した．

各章の終わりに「ノート」として，章の主題に対する著者の見方や関連する研究の方向を述べておいた．本書を読んだあとで，どちらの方向に学習や研究を進めるべきかを決める際の参考になれば幸いである．文献表も同様の意味でつけてある．ただし，この文献表はもちろん完全なものではなく，本書の内容と著者の興味に呼応する形でかなり偏っているといわなければならない．場の量子論の数学的研究に関わる文献資料のひとつにはなろうかと思う．

各章末の演習問題において「♮」のついたものは，本文で指示した問題である．より高次の数学的知覚能力と思考力を身につけるには，やはり，問題を数多く解くことが必要である．

本書が「数理物理シリーズ」の一冊として刊行されることは著者の大きな喜びである．編者の荒木不二洋先生と江沢 洋先生ならびに日本評論社の亀井哲治郎氏に心から感謝したい．また，日本評論社の高橋健一氏には執筆予定の打ち合わせや本書の原稿の校正などでたいへんお世話になった．厚くお礼申し上げる．

2000 年 白樺が新緑に輝く頃，札幌にて
新井朝雄

ギリシャ文字一覧表

A,	α	アルファ	N,	ν	ニュー
B,	β	ベータ	Ξ,	ξ	グザイ
Γ,	γ	ガンマ	O,	o	オミクロン
Δ,	δ	デルタ	Π,	π	パイ
E,	ϵ	イプシロン	P,	ρ	ロー
Z,	ζ	ゼータ	Σ,	σ	シグマ
H,	η	イータ	T,	τ	タウ
Θ,	θ	シータ (テータ)	Υ,	υ	ウプシロン
I,	ι	イオタ	Φ,	ϕ	ファイ
K,	κ	カッパ	X,	χ	カイ
Λ,	λ	ラムダ	Ψ,	ψ	プサイ
M,	μ	ミュー	Ω,	ω	オメガ

記号の対応表

A,	$\mathfrak{A}$,	$\mathfrak{a}$,	$\mathscr{A}$	N,	$\mathfrak{N}$,	$\mathfrak{n}$,	$\mathscr{N}$
B,	$\mathfrak{B}$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathscr{B}$	O,	$\mathfrak{O}$,	$\mathfrak{o}$,	$\mathscr{O}$
C,	$\mathfrak{C}$,	$\mathfrak{c}$,	$\mathscr{C}$	P,	$\mathfrak{P}$,	$\mathfrak{p}$,	$\mathscr{P}$
D,	$\mathfrak{D}$,	$\mathfrak{d}$,	$\mathscr{D}$	Q,	$\mathfrak{Q}$,	$\mathfrak{q}$,	$\mathscr{Q}$
E,	$\mathfrak{E}$,	$\mathfrak{e}$,	$\mathscr{E}$	R,	$\mathfrak{R}$,	$\mathfrak{r}$,	$\mathscr{R}$
F,	$\mathfrak{F}$,	$\mathfrak{f}$,	$\mathscr{F}$	S,	$\mathfrak{S}$,	$\mathfrak{s}$,	$\mathscr{S}$
G,	$\mathfrak{G}$,	$\mathfrak{g}$,	$\mathscr{G}$	T,	$\mathfrak{T}$,	$\mathfrak{t}$,	$\mathscr{T}$
H,	$\mathfrak{H}$,	$\mathfrak{h}$,	$\mathscr{H}$	U,	$\mathfrak{U}$,	$\mathfrak{u}$,	$\mathscr{U}$
I,	$\mathfrak{I}$,	$\mathfrak{i}$,	$\mathscr{I}$	V,	$\mathfrak{V}$,	$\mathfrak{v}$,	$\mathscr{V}$
J,	$\mathfrak{J}$,	$\mathfrak{j}$,	$\mathscr{J}$	W,	$\mathfrak{W}$,	$\mathfrak{w}$,	$\mathscr{W}$
K,	$\mathfrak{K}$,	$\mathfrak{k}$,	$\mathscr{K}$	X,	$\mathfrak{X}$,	$\mathfrak{x}$,	$\mathscr{X}$
L,	$\mathfrak{L}$,	$\mathfrak{l}$,	$\mathscr{L}$	Y,	$\mathfrak{Y}$,	$\mathfrak{y}$,	$\mathscr{Y}$
M,	$\mathfrak{M}$,	$\mathfrak{m}$,	$\mathscr{M}$	Z,	$\mathfrak{Z}$,	$\mathfrak{z}$,	$\mathscr{Z}$

目 次

第 2 巻目次

第 0 章

序：量子場とはどういうものか — スケッチ

量子場の観念は，古典場を形式的に量子化する処方 — 場の量子化 — により得られる．この章では，場の量子化の方法の形式的な議論を概観し，基本的な問題点を指摘する．

0-1 節　はじめに

物質を構成する根元的，究極的な要素は**素粒子** (elementary particle) とよばれる．だが，素粒子は，粒子とは言っても，実は，日常的あるいは古典力学的な意味での粒子ではない．このことは，たとえば，素粒子が**波動-粒子の二重性**をもつこと，また，生成・消滅が可能である，といった事実に現れている．

物質構成の最初の微視的な階層である原子は**電子**と**原子核**から成る．電子は基本的な素粒子の 1 つである．だが，原子核は，水素原子の場合を除けば，まだ根元的な要素ではなく，**核子** (nucleon) (陽子，中性子) とよばれる素粒子から構成されていることが知られる (水素原子の原子核は例外的に陽子 1 個から成る)．原子核の中で核子どうしを結びつけている**核力**を媒介する π **中間子**も素粒子である．巨視的・感覚的知覚の意味では物質と対照をなす，別格の存在である光 (電磁場) も，**光子** (photon) とよばれる素粒子の巨視的・波動的現れとみなされる．これらの他にも，多くの素粒子の存在が確認されている[1)]．

[1)] 現在では，ゲージ場の理論に基づいて，数ある素粒子のうちでも，真に基本的なものは，クォーク，レプトン，ゲージボソンとよばれる 3 種の素粒子の族であるとする説が有力である．たとえば，電子はレプトンの一種であり，核子や中間子はクォークからできているとされる．光子はゲージボソンの一種である．Halzen and Martin (1984) を参照．

波動・粒子の二重性や生成・消滅可能性を含む，素粒子の本性の記述にとっては，ニュートン力学とマクスウェルの電磁気学を支柱とする古典物理学はもはや有効ではない[2)]．何らかの新しい理論が探求されなければならないのである．このような探求の中から，素粒子の諸性質や諸法則を原理的に解明するための理論として誕生したのが**量子力学** (quantum mechanics) であり，その 1 つの拡張としての**場の量子論** (quantum field theory) であった．後者のまとまった形式は Heisenberg (ハイゼンベルク) と Pauli (パウリ) によってあたえられた (Heisenberg and Pauli (1929, 1930))[3)]．

光の波動性が，マクスウェルの電磁気学において，マクスウェル方程式によって電磁場の運動としてとらえられたように，物質に対しても，素粒子の波動性に注目して，これを波動場として取り扱うことが可能である．この意味での波動場を**物質場**という．これは，概念的には，電磁場，重力場，流体の速度場等，古典物理学における他の場と同様の "位階" にあると考えるべきものである．つまり，**古典場**なのである．古典場には相対論的なものとそうでないものがある[4)]．たとえば，電子には**電子場**が付随し，この場は，相対論的な領域では Dirac (ディラック) 方程式によって，非相対論的な領域では de Broglie (ド・ブローイ) 方程式によって記述される[5)]．だが，古典場の理論では，生成・消滅する素粒子の粒子性を導きだすことはできない．現実の素粒子を記述するための真正な理論を得るためには，古典物理学の理論としての物質場の理論になんらかの修正を施す必要があるのである．この修正が**場の量子化**とよばれる処方であり，そうして得られるのが物理学の理論としての場の量子論である．古典場の量子化という発見法的処方箋によって，その存在が期待される対象は**量子場** (quantum field) とよばれ，場の量子論を構築する上での基本的概念となるはずのものである．だが，以下の論述で示唆されるように，量子場の数学的存在は全然自明ではなく，優れて数学的な問題を提示するのである．

この章の目的は，物理でなされている，場の量子化の方法を概観し，7 章以後で行う，量子場の厳密な数学的構成と解析に対する，ある種の動機づけをあたえることである．場の量子化の方法の基本的なものとして，

[2)] 原子的なスケールの世界の現象に対して古典物理学が直面する困難については，新井-江沢 (1999a) の序章を参照．

[3)] この仕事以前に，Dirac (ディラック)，P. Jordan (ヨルダン)，Klein (クライン)，Pauli，Wigner (ウィグナー) らの研究がある．歴史的に詳しいことについては，たとえば，江沢-恒藤 (1977) の第 I 部序論，高林 (1977) の 13 章を参照．

[4)] 本書で「相対論」というときは，Einstein (アインシュタイン) の特殊相対性理論をさす．相対論については，たとえば，Schutz (1985) を参照．

[5)] 朝永 (1997)，本書の 8 章，11 章を参照．

(i)　正準量子化の方法

(ii)　Feynman (ファインマン) による経路積分法 (汎関数積分法)

(iii)　Schwinger (シュウィンガー) による汎関数微分方程式の方法

がある．いずれも形式的には "同等" である．これらの方法の基本的な考え方を $P(\phi)_\nu$ とよばれるモデルを用いて解説する．しかし，この章の議論はほとんどすべて形式的・発見法的なものであり，数学的には厳密でないことをあらかじめお断りしておく[6)]．

0-2 節　正準量子化の方法 — ハミルトン形式

この方法は，Heisenberg and Pauli (1929, 1930) に負うものであり，もっとも伝統的で標準的なものである．基本的なアイデアは，有限自由度の量子力学の正準量子化の処方を無限自由度の場合に拡張することである．

0-2-1　古典場の理論のラグランジュ形式

準備として，古典場の理論のラグランジュ形式を簡単に復習しておく．$\nu = 1 + d$ 次元時空

$$\mathbb{R}^\nu = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d = \{x = (x^0, x^1, \cdots, x^d) \,|\, x^\mu \in \mathbb{R}, \mu = 0, \cdots, d\} \tag{0.1}$$

(x^0 は時間座標，$(x^1, \cdots, x^d)$ は空間座標) の上の n 成分の場 $\phi = (\phi_r)_{r=1}^n$ を考える (i.e., 各 ϕ_r は $\mathbb{R}^\nu$ 上の複素数値関数)．変数 x^μ に関する偏微分を ∂_μ と表す．$\mathscr{L}$ を $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^\nu$ 上の複素数値の微分可能な関数とし，

$$\tilde{\mathscr{L}}(x) := \mathscr{L}(\phi, \partial_0\phi, \cdots, \partial_d\phi) \tag{0.2}$$

とおく $(\partial_\mu\phi := (\partial_\mu\phi_r)_{r=1}^n)$ [7)]．場 ϕ の各成分 ϕ_r に対する方程式 — **場の方程式** — が

$$\frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}}{\partial\phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} = 0, \quad r = 1, \cdots, n, \tag{0.3}$$

という形に表されるならば，$\tilde{\mathscr{L}}$ を場 ϕ の**ラグランジュ密度関数**という．ここで，ギリシア文字 μ については，$\mu = 0$ から d までの和をとるものとする (Einstein の規約)．また，$\partial\tilde{\mathscr{L}}/\partial\phi_r$ は $\phi_r(x)$ を 1 つの変数とみて，$\tilde{\mathscr{L}}$ を偏微分したものである．

[6)] ただし，古典論的な部分に関しては，厳密化することは容易である．

[7)] 「$A := B$」は「B によって A を定義する」という意味の記法である．本書では，等号が定義である場合を強調したいとき用いる．

$\partial\tilde{\mathscr{L}}/\partial(\partial_\mu\phi_r)$ についても同様[8]．(0.3) の型の方程式を**オイラー (Euler)-ラグランジュ(Lagrange) 方程式**という．

注意 0-1　オイラー-ラグランジュ方程式 (0.3) は ϕ の汎関数 $L(\phi) := \int_{\mathbb{R}^\nu} \tilde{\mathscr{L}}(x)\,dx$ が停留値 (極値) をとるための条件として導かれる (**変分原理**).

$\tilde{\mathscr{L}}$ を場 ϕ のラクランジュ密度関数としよう．ϕ の時間微分を

$$\dot{\phi} := \partial_0\phi \tag{0.4}$$

と表す．このとき，

$$\pi_r := \frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}}{\partial\dot{\phi}_r} \tag{0.5}$$

を ϕ_r の**正準共役運動量**または**正準共役場**という．これと ϕ を用いて，

$$\mathscr{H}(x) := \sum_{r=1}^{n} \pi_r(x)\dot{\phi}_r(x) - \tilde{\mathscr{L}}(x) \tag{0.6}$$

によって定義される関数 $\mathscr{H}(x)$ を**ハミルトン密度関数**という．この関数を空間変数

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^d) \in \mathbb{R}^d \tag{0.7}$$

について積分した量

$$H := \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{H}(x)\,d\boldsymbol{x} \tag{0.8}$$

を**ハミルトニアン**という．これは物理的には場の全エネルギーを表す．方程式 (0.3) を使えば，H は時刻 x^0 によらないこと，すなわち，

$$\frac{dH}{dx^0} = 0 \tag{0.9}$$

を示すことができる (問題 1)[9]．これはエネルギー保存則を意味する．したがって，特に，(0.8) で $x^0 = 0$ として，

$$H = \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{H}(0, \boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \tag{0.10}$$

を得る．

---

[8] より厳密に言えば，$\mathscr{L}$ の変数依存性を $\mathscr{L} = \mathscr{L}(t_1, \cdots, t_n, s_{01}, \cdots, s_{0n}, \cdots, s_{d1}, \cdots, s_{dn})$ とするとき，$\partial\tilde{\mathscr{L}}/\partial\phi_r$ は $\partial\mathscr{L}/\partial t_r$ において，$t_j = \phi_j, s_{\mu j} = \partial_\mu\phi_j$ ($j = 1, \cdots, n$, $\mu = 0, \cdots, d$) としたものであり，$\partial\tilde{\mathscr{L}}/\partial(\partial_\mu\phi_r)$ は $\partial\mathscr{L}/\partial s_{\mu r}$ において，$t_j = \phi_j, s_{\mu j} = \partial_\mu\phi_j$ ($j = 1, \cdots, n$, $\mu = 0, \cdots, d$ としたものである．

[9] 厳密に証明するには，π, $\dot{\phi}$, $\mathscr{L}$ およびこれらの時間微分に関してある条件が必要である．

各 $j=1,\cdots,d$ に対して，関数

$$\mathscr{P}_j(x) := \sum_{r=1}^{n} \pi_r \partial_j \phi_r \tag{0.11}$$

を導入し，

$$P_j := \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{P}_j(x)\, d\boldsymbol{x} \tag{0.12}$$

とおく．ベクトル $\boldsymbol{P} := (P_1,\cdots,P_d)$ を場の**運動量**という．関数 $\mathscr{P}_j(x)$ は**運動量密度**の第 j 成分とよばれる．ハミルトニアンの場合と同様にして，運動量 $\boldsymbol{P}$ の各成分 P_j は時刻によらないこと，すなわち，

$$\frac{dP_j}{dx^0} = 0 \tag{0.13}$$

であることがわかる (運動量保存則)(問題 2)．したがって，特に，

$$P_j := \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{P}_j(0,\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{0.14}$$

H, P の他に場の角運動量なる概念も定義されるが，ここでは省略する[10)]．

0-2-2　非線形スカラー場の古典論

$\mathbb{R}^\nu$ 上の実スカラー場 ϕ で非線形 Klein-Gordon (クライン-ゴルドン) 方程式 (KG 方程式と略す)

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) + \lambda P'(\phi(x)) = 0 \tag{0.15}$$

にしたがう場の量子化について考える．ここで，

$$\Box := \partial_0^2 - \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 \tag{0.16}$$

はダランベールシャン，$m>0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, は定数，P はあたえられた多項式，P' は P の導関数である．

注意 0-2　通常の MKS 単位系における KG 方程式は，(0.15) において，偏微分作用素 $\Box$ を

$$\frac{1}{c^2}\partial_0^2 - \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2$$

で置き換えた形をしている．ここで，$c \fallingdotseq 2.9979 \times 10^8 \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ は真空中の光の速さである．だが，$c=1$ の単位系を用いることにすれば，KG 方程式は (0.15) の形になる．

[10)] 問題 3 に一例をあげた．一般的な場合については，Bjorken and Drell (1965) の 11 章を参照．

本書では，特に断らない限り，$c=1$ の単位系を用いる．

以下，しばしば，

$$x^0 = t, \quad \partial_0 = \partial_t := \frac{\partial}{\partial t}, \tag{0.17}$$

という記法を使用する．方程式 (0.15) に対するラグランジュ密度関数は

$$\mathscr{L}_\lambda(x) = \frac{1}{2}\left\{(\partial_t\phi(x))^2 - |\nabla\phi(x)|^2 - m^2\phi(x)^2\right\} - \lambda P(\phi(x)) \tag{0.18}$$

である．ここで，

$$\nabla\phi := (\partial_1\phi, \cdots, \partial_d\phi) \tag{0.19}$$

は場 ϕ の空間変数 $\boldsymbol{x}$ に関する勾配 (グラディエント) を表す．実際，(0.3) において，$n=1, \phi_1=\phi, \tilde{\mathscr{L}}=\mathscr{L}_\lambda$ としたものは，非線形 KG 方程式 (0.15) を与える．したがって，ϕ の共役運動量を π とすれば，(0.5) によって，

$$\pi = \frac{\partial\mathscr{L}_\lambda}{\partial(\partial_t\phi)} = \partial_t\phi = \dot{\phi} \tag{0.20}$$

であり，ハミルトニアンは，(0.8) により，

$$H_\lambda(\phi,\pi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} d\boldsymbol{x}\{\pi(x)^2 + |\nabla\phi(x)|^2 + m^2\phi(x)^2\} + \lambda\int_{\mathbf{R}^d} d\boldsymbol{x}\, P(\phi(x)) \tag{0.21}$$

となる．前項の議論から，$H_\lambda(\phi,\pi)$ は時刻 t によらない．

古典場 ϕ で記述される系の運動量の第 j 成分は，(0.12) により，

$$P_j := \int_{\mathbf{R}^d} \pi(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^j}\, d\boldsymbol{x} \tag{0.22}$$

であり，これも時刻 t によらない．

(0.15) の左辺にある項 $\lambda P'(\phi(x))$ は場 ϕ の自己相互作用を表す．$\lambda=0$ の場合は相互作用がない場合に対応し，この場合の場，すなわち，**自由な KG 方程式**

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0 \tag{0.23}$$

の解は**自由スカラー場**あるいは単に**自由場** (free field) とよばれる．

0-2-3　量子化

ここまでは古典場の理論である．一般に，量子力学では，物理系の状態は，ヒルベルト空間の単位ベクトルで表され，物理量は，このヒルベルト空間で作用する自己共

役作用素として表現されることが要請される (ただし，絶対値が 1 の複素定数倍だけ異なるベクトルどうしは同じ状態とみなす)[11)]．ハミルトニアン $H_\lambda(\phi,\pi)$ で記述される古典場の理論に対応する量子力学の構築 — 方程式 (0.15) にしたがう場 ϕ の量子化 — にもこのことはあてはまる．この理論の**正準量子化** (canonical quantization) とは，天降り的に述べるならば，古典場 $\phi(x),\pi(x)$ を適当なヒルベルト空間 — $\mathfrak{H}$ としよう — で作用する線形作用素 $\hat{\phi}(x)$, $\hat{\pi}(x)$ で，同時刻における**正準交換関係** (canonical commutation relation : CCR と略す)

$$[\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x}),\hat{\pi}(t,\boldsymbol{y})] = i\hbar\delta^d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{0.24a}$$

$$[\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x}),\hat{\phi}(t,\boldsymbol{y})] = 0 = [\hat{\pi}(t,\boldsymbol{x}),\hat{\pi}(t,\boldsymbol{y})], \tag{0.24b}$$

をみたすものに置き換えることである．ここで，

$$[A,B] := AB - BA \tag{0.25}$$

は，代数的な対象 A と B の交換子，$\hbar := h/2\pi$ (h は Planck の定数)，i は虚数単位，$\delta^d(\boldsymbol{x})$ は $\mathbb{R}^d$ 上のデルタ超関数である[12)]．

(0.24a), (0.24b) は有限自由度の量子力学の CCR[13)]：

$$[Q_j,P_k] = i\hbar\delta_{jk},\quad [Q_j,Q_k] = 0 = [P_j,P_k],\quad j,k=1,\cdots,N, \tag{0.26}$$

(N は自由度) の無限自由度極限 ($N \longrightarrow \infty$) としても得られる．形式的な対応関係は，

$$Q_j \longleftrightarrow \hat{\phi}(t,\boldsymbol{x}),\quad P_j \longleftrightarrow \hat{\pi}(t,\boldsymbol{x}),\quad j \longleftrightarrow \boldsymbol{x},$$

である．この観点については，江沢-新井 (1988) の 1 章を参照されたい．

上述の正準量子化の処方に応じて，場の方程式 (0.15) は，ϕ を $\hat{\phi}$ で置き換えて得られる，形式的な作用素方程式

$$\left(\Box + m^2\right)\hat{\phi}(x) + \lambda P'(\hat{\phi}(x)) = 0 \tag{0.27}$$

になり，ハミルトニアンは形式的に

$$H_\lambda^{\text{formal}} = H_\lambda(\hat{\phi},\hat{\pi}) \tag{0.28}$$

という作用素になる．(0.27) をみたす作用素 $\hat{\phi}(x)$ を古典場 ϕ に対応する**量子場**という．こうして得られる量子場のモデルを $P(\phi)_\nu$ **モデル**という．これは，物理的には中

11) 新井 (1997a) の 6 章を参照.

12) 超関数については，付録 D を参照.

13) 新井 (1997a) の 6 章，6.4 節を参照.

性中間子の自己相互作用を記述するモデルをあたえる．特に，$P(x)=x^4$ $(x\in\mathbb{R})$ のときのモデルは ϕ_ν^4 と記される．

0-2-4　量子化における数学的困難

ところで，(0.24a), (0.24b), (0.27) をみたす作用素 $\hat{\phi}(x)$ の数学的存在を示すにあたっては，ある種の困難がただちに予想される．実際，(0.24a) の右辺にはデルタ超関数という特異な超関数が現われているので，量子場 $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ は，もし存在するとすれば，作用素値関数ではなく，**作用素値超関数**であると考えるのが自然である．ここで，$\hat{\phi}$ が作用素値超関数であるというのは，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ を $\mathbb{R}^\nu$ 上の急減少関数の全体とするとき[14)]，$\hat{\phi}(x)$ を $\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ の元 f で均(なら)した (smeared) 対象

$$\hat{\phi}(f)=\int_{\mathbb{R}^\nu}\hat{\phi}(x)f(x)\,dx$$

がヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ で作用する線形作用素として意味をもち，しかも，対応 $f\longrightarrow\hat{\phi}(f)$ が $\mathfrak{H}$ の適当な位相で連続になる場合をいう[15)]．すると，困ったことに，たとえば，同一時空点 x における場の積 $\hat{\phi}(x)^n$ $(n\geq 2)$ は，一般には数学的に意味をもたなくなる．これは通常の超関数の積の場合と同様である．したがって，方程式 (0.27) は — $P'(\hat{\phi}(x))$ の中に同一時空点での場の積が現われているので — そのままでは意味をもたない可能性がある．実際，これは，場の量子論におけるいわゆる“発散の困難” — 物理的に意味があるべき量を計算すると有限の値が得られず発散してしまう事態 — を招来し，量子場 $\hat{\phi}(f)$ を数学的に厳密に構成する問題を難しくする要因の 1 つなのである．したがって，(0.27) の左辺はなんらかの意味で修正を要することが示唆される．この修正 — ある種の正則化 — が，方程式のレヴェルでの，発散の困難の処理，すなわち，“くりこみ” (renormalization) である．実際，$P(\phi)_2$ モデル ($\nu=2$ の場合) では，いま述べた正則化が必要であることが厳密に示される (Schrader (1974))．

場の量子論における発散を回避し，実験と比較できる，意味のある理論を取り出す方法は，**くりこみ理論** (renormalization theory) として確立され，物理学としては，大きな成功が収められた．しかし，くりこみ理論の処方の完全に数学的に厳密な基礎づけは，なおも未解決のままである[16)]．

---

14) 付録 D の D-1 節を参照.

15) 厳密な定義については 7 章を参照.

16) 発散とくりこみの問題については，くりこみ理論の創始者のひとりによって書かれた優れた解説がある：朝永 (1977a).

0-2-5　自由場の形式的量子化

自由場の場合の量子化を考察することにより，CCR (0.24a), (0.24b) の要請は，ある意味で自然なものであることを理解することができる．自由スカラー場，すなわち，自由な KG 方程式 (0.23) の解 ϕ は，フーリエ変換を使うことにより，容易に求めることができる．実際，

$$\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t,\boldsymbol{x}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d, \tag{0.29a}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} := \sum_{j=1}^{d} k_j x_j, \tag{0.29b}$$

とすれば，フーリエ逆変換公式により，

$$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{k} \tag{0.30}$$

であり[17]，(0.23) は

$$\frac{d^2\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k})}{dt^2} = -\omega(\boldsymbol{k})^2 \tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k}), \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d,$$

を導く．ただし，

$$\omega(\boldsymbol{k}) := \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}. \tag{0.31}$$

したがって，各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d$ に対して，定数 $c_\pm(\boldsymbol{k})$ があって，

$$\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k}) = c_-(\boldsymbol{k}) e^{it\omega(\boldsymbol{k})} + c_+(\boldsymbol{k}) e^{-it\omega(\boldsymbol{k})}$$

という形に書ける．これを (0.30) の右辺に代入すれば，

$$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(c_-(\boldsymbol{k}) e^{it\omega(\boldsymbol{k}) + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + c_+(\boldsymbol{k}) e^{-it\omega(\boldsymbol{k}) + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right) d\boldsymbol{k}. \tag{0.32}$$

そこで，

$$a_+(\boldsymbol{k}) := \frac{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}\, c_+(\boldsymbol{k})}{\sqrt{\hbar}}, \quad a_-(\boldsymbol{k})^* := \frac{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}\, c_-(-\boldsymbol{k})}{\sqrt{\hbar}}, \tag{0.33}$$

とおけば (複素数 z に対して，その共役を z^* または $\bar{z}$ で表す)[18]，

---

[17] ここでは，いちいち断らないが，フーリエ変換の理論が適用できる関数のみを対象とする．フーリエ変換の厳密な理論については，たとえば，新井 (1997a) の 5 章を参照せよ．

[18] この置き換えは，後に量子化を考察する上での便宜上のものであり，古典論の範囲では特に積極的な意味は持たない．

$$\phi(t,\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d\omega(\boldsymbol{k})}}\left(a_-(\boldsymbol{k})^*e^{it\omega(\boldsymbol{k})-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a_+(\boldsymbol{k})e^{-it\omega(\boldsymbol{k})+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right)d\boldsymbol{k} \tag{0.34}$$

と書き換えられる．これが，自由な KG 方程式 (0.23) の複素数値関数解の一般形である．この表式は，たとえば，$a_\pm\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ならば意味をもつ．

さて，以下では，簡単のため，ϕ が実数値関数である場合に考察を限定しよう[19]．つまり，すべての $(t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^\nu$ に対して $\phi(t,\boldsymbol{x})^*=\phi(t,\boldsymbol{x})$ とする．このとき，両辺のフーリエ変換を考えることにより，任意の $t\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d$ に対して，

$$a_-(\boldsymbol{k})e^{-it\omega(\boldsymbol{k})}+a_+(-\boldsymbol{k})^*e^{it\omega(\boldsymbol{k})}=a_-(-\boldsymbol{k})^*e^{it\omega(\boldsymbol{k})}+a_+(\boldsymbol{k})e^{-it\omega(\boldsymbol{k})}$$

でなければならない．これと t の関数 $e^{it\omega}$, $e^{-it\omega}$ $(t\neq 0)$ の 1 次独立性により，$a_+(\boldsymbol{k})=a_-(\boldsymbol{k})$ が導かれる．したがって，$a(\boldsymbol{k}):=a_+(\boldsymbol{k})=a_-(\boldsymbol{k})$ とおけば，

$$\phi(t,\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^d}d\boldsymbol{k}\,\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d\omega(\boldsymbol{k})}}\left(a(\boldsymbol{k})^*e^{i\omega(\boldsymbol{k})t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{0.35}$$

と表される．共役運動量は，(0.20) から，

$$\pi(t,\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^d}d\boldsymbol{k}\,\frac{i\sqrt{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}}{\sqrt{2(2\pi)^d}}\left(a(\boldsymbol{k})^*e^{i\omega(\boldsymbol{k})t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}-a(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{0.36}$$

となる．

自由な KG 方程式の解 (0.35) を用いて，いまの場合のハミルトニアン — 自由スカラー場のハミルトニアン —

$$H_0:=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}d\boldsymbol{x}\,\{\pi(x)^2+|\nabla\phi(x)|^2+m^2\phi(x)^2\} \tag{0.37}$$

を計算すると，

$$H_0=\int_{\mathbb{R}^d}\hbar\omega(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})^*a(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k} \tag{0.38}$$

となる (問題 4)．同様に，(0.22) によって定義される全運動量は

$$P_j:=\int_{\mathbb{R}^d}\hbar k_j a(\boldsymbol{k})^*a(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k} \tag{0.39}$$

と計算される．

以上は，自由なスカラー場の古典論である．もし，この理論の量子化ができるとすれば，

---

[19] 複素数値関数の場合も全く並行的に議論できる．

量子化された理論においては，ϕ, π, H_0, P_j は作用素によって置き換えられる．(0.35), (0.36), (0.38), (0.39) からわかるように，ϕ, π, H_0, P_j は 1 つの関数 $a(\boldsymbol{k})$ を素材としてつくられている．したがって，量子化は，関数 $a(\boldsymbol{k})$ に対応する作用素 — $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ と書こう — を見つけることによって遂行されると予想される．作用素 $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ がみたすべき性質は，素粒子の波動像と粒子像とのある種の対応をあたえる **de Broglie-Einstein の関係**

$$E = \hbar\omega, \quad \boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}, \tag{0.40}$$

— $E, \boldsymbol{p}$ は，それぞれ，粒子像における粒子のエネルギー，運動量，$\omega, \boldsymbol{k}$ は，それぞれ，波動像における波動の角振動数，波数ベクトル — と素粒子が "エネルギー量子" として数えられるという描像に着目することによって得られる．

(0.38) から，$\hbar\omega(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})^*a(\boldsymbol{k})$ は，波数空間でのエネルギー密度と解釈される．これの量子化は，$\hbar\omega(\boldsymbol{k})\hat{a}(\boldsymbol{k})^*\hat{a}(\boldsymbol{k})$ になるが，これは 1 自由度の調和振動子のハミルトニアン $H_{\rm os} := \hbar\omega_0 a^* a$ を想起させる．ここで，$\omega_0 > 0$ は定数，a は，$L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素で，$\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 上で $[a, a^*] = 1$ をみたすものである[20]．$H_{\rm os}$ のスペクトルは，固有値のみからなり，$0, \hbar\omega_0, 2\hbar\omega_0, \cdots, n\hbar\omega_0, \cdots$ $(n \geq 0)$ である[21]．これは，まさに，"エネルギーの量子化" (エネルギーの離散化) を表している．さらに，$a\psi_0 = 0$ となるベクトル $\psi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ が一意的に存在し，固有値 $n\hbar\omega_0$ に属する固有ベクトルは，定数倍を除いて，$a^{*n}\psi_0$ であたえられる．

そこで，調和振動子の場合の形式的拡張として，$\hat{a}(\boldsymbol{k})$ に対して，交換関係

$$[\hat{a}(\boldsymbol{k}), \hat{a}(\boldsymbol{k}')^*] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \tag{0.41}$$

$$[\hat{a}(\boldsymbol{k}), \hat{a}(\boldsymbol{k}')] = 0 = [\hat{a}(\boldsymbol{k})^*, \hat{a}(\boldsymbol{k}')^*] \tag{0.42}$$

を設定し，

$$\hat{a}(\boldsymbol{k})\Omega = 0, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{0.43}$$

をみたすベクトル Ω が存在すると仮定してみよう．このとき，

$$\Psi_{\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n} := \hat{a}(\boldsymbol{k}_1)^* \cdots \hat{a}(\boldsymbol{k}_n)^* \Omega$$

$(\boldsymbol{k}_j \in \mathbb{R}^d)$ とすれば，(0.41) と (0.43) によって，

---

[20] 新井 (1997a) の 7 章，新井-江沢 (1999b) の 3 章，3.8 節を参照．

[21] 前掲書を参照．

$$\hat{a}(\boldsymbol{k})\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n} = \sum_{j=1}^{n} \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_j)\hat{a}(\boldsymbol{k}_1)^* \cdots \hat{a}(\boldsymbol{k}_{j-1})^*\hat{a}(\boldsymbol{k}_{j+1})^* \cdots \hat{a}(\boldsymbol{k}_n)^*\Omega. \tag{0.44}$$

したがって，

$$\begin{aligned}&\hat{a}(\boldsymbol{k})^*\hat{a}(\boldsymbol{k})\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}\\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_j)\hat{a}(\boldsymbol{k}_1)^* \cdots \hat{a}(\boldsymbol{k}_{j-1})^*\hat{a}(\boldsymbol{k})^*\hat{a}(\boldsymbol{k}_{j+1})^* \cdots \hat{a}(\boldsymbol{k}_n)\Omega\end{aligned}$$

であるから，形式的作用素

$$\hat{H}_0 := \int_{\mathbb{R}^d} \hbar\omega(\boldsymbol{k})\hat{a}(\boldsymbol{k})^*\hat{a}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}, \quad \hat{P}_j := \int_{\mathbb{R}^d} \hbar k_j \hat{a}(\boldsymbol{k})^*\hat{a}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}, \tag{0.45}$$

を導入すると，

$$\hat{H}_0\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n} = \left[\sum_{j=1}^{n} \hbar\omega(\boldsymbol{k}_j)\right]\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}, \tag{0.46}$$

$$\hat{P}_j\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n} = \left[\sum_{j=1}^{n} \hbar k_j\right]\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}, \tag{0.47}$$

が得られる．したがって，ベクトル $\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}$ は $\hat{H}_0$, $\hat{P}_j$ の固有ベクトルであり，その固有値は，それぞれ，$\sum_{j=1}^{n} \hbar\omega(\boldsymbol{k}_j)$, $\sum_{j=1}^{n} \hbar k_j$ である．(0.40) によれば，前者は，運動量がそれぞれ，$\hbar\boldsymbol{k}_1, \cdots, \hbar\boldsymbol{k}_n$ である n 個の粒子系の全エネルギーを，後者はそのような系の全運動量を表す．$n=0$ の場合は，(0.43) によって，$\hat{H}_0\Omega = 0$, $\hat{P}_j\Omega = 0$ である．これは，Ω を，粒子が全然存在しない状態，すなわち，“真空” と解釈することを許すものである．他方，ベクトル $\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}$ は，運動量がそれぞれ，$\hbar\boldsymbol{k}_1, \cdots, \hbar\boldsymbol{k}_n$ の n 個の粒子が存在する状態を表すと解釈される．この解釈のもとでは，$\hat{a}(\cdot)^*$ は真空から粒子を生成する機能をもつ作用素とみることができる．そこで，$\hat{a}(\boldsymbol{k})^*$ を**生成作用素**とよぶ．他方，(0.44) からわかるように，$\hat{a}(\cdot)$ は粒子を 1 個消滅させる機能をもつ．このゆえに $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ を**消滅作用素**とよぶ．こうして，交換関係 (0.41), (0.42) と (0.43) をみたすベクトル (真空) の存在を要請することにより，エネルギー・運動量に関して粒子的性質が導かれる．

波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の物質波に対応する粒子のエネルギーと運動量をそれぞれ，$E_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{p}$ とすれば，(0.40) によって，$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ であり，

$$E_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}) = \hbar\omega(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_0^2} \tag{0.48}$$

が成り立つ．ただし，

$$m_0 := \hbar m. \tag{0.49}$$

アインシュタインの特殊相対性理論によれば，(0.48) の右辺は，質量が m_0 の自由粒子が運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつときのエネルギーを表す．したがって，いま考察している量子場の理論は，質量が m_0 の自由な素粒子を記述すると解釈される．さらに，上述の n 粒子状態 $\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}$ は，(0.42) によって，$\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n$ の任意の置換 — 当該の n 個の粒子の任意の入れ換え — に対して不変であることにも注意しよう．

作用素 $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ を用いて，量子化された場 — 量子場 — $\hat{\phi}$ を

$$\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k}\, \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d\omega(\boldsymbol{k})}} \left(\hat{a}(\boldsymbol{k})^* e^{i\omega(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}(\boldsymbol{k}) e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{0.50}$$

によって定義する．したがって，共役運動量の量子化は

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(t,\boldsymbol{x}) &:= \partial_t \hat{\phi}(t,\boldsymbol{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k}\, \frac{i\sqrt{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}}{\sqrt{2(2\pi)^d}} \left(\hat{a}(\boldsymbol{k})^* e^{i\omega(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - \hat{a}(\boldsymbol{k}) e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \end{aligned}\tag{0.51}$$

となる．これらが，形式的に CCR (0.24a), (0.24b) をみたすことは容易に確かめられる (問題 5)．こうして，自由場の形式的な正準量子化がなされる．

注意 0-3　(0.41) の右辺には，デルタ超関数が現れているので，$\hat{a}(\boldsymbol{k})$ は，もし数学的に存在するとすれば，作用素値超関数と予想するのが自然である．そこで，$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\hat{a}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} \hat{a}(\boldsymbol{k})\overline{f(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k}$$

を形式的に考える[22]．$\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数 ψ で，$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} < \infty$ をみたすものから形成されるヒルベルト空間を $L^2(\mathbb{R}^d)$ とする[23]．このとき，(0.41), (0.42) は

$$[\hat{a}(f), \hat{a}(g)^*] = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

$$[\hat{a}(f), \hat{a}(g)] = 0, \quad [\hat{a}(f)^*, \hat{a}(g)^*] = 0, \quad f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

と読み換えられる．ここで，

---

[22] 右辺において f でなく，$\bar{f}$ (f の共役) としたのは便宜的なものである．

[23] 詳しくは，新井 (1997a) の 1 章，例 1.16，新井-江沢 (1999a) の 1 章，例 1.15 を参照．

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(\boldsymbol{k})}g(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}$$

は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の内積である．また，$\Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n}$ に対応する n 粒子状態は，数学的な意味では，$f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ $(j=1,\cdots,n)$ を用いて，

$$\begin{aligned}\Psi(f_1,\cdots,f_n) &:= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \Psi_{\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n} f_1(\boldsymbol{k}_1)\cdots f_n(\boldsymbol{k}_n)\,d\boldsymbol{k}_1\cdots d\boldsymbol{k}_n \\ &= \hat{a}(f_1)^*\cdots\hat{a}(f_n)^*\Omega\end{aligned}$$

という形のベクトルによって記述されると推測される．こうして，無数のベクトル

$$\{\Omega,\ \hat{a}(f_1)^*\cdots\hat{a}(f_n)^*\Omega \,|\, n\in\mathbb{N},\ f_j\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ j=1,\cdots,n\}$$

によって生成されるヒルベルト空間の観念が得られるが，これがまさに本書の主題の 1 つであるボソンフォック空間の理念へと昇華されるのである[24]．

比較のために，(0.50), (0.51) によって定義される量子場 $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ に対して

$$H_0^{\text{formal}} := H_0(\hat{\phi},\hat{\pi}) \tag{0.52}$$

を計算してみよう．$\hat{a}(\boldsymbol{k})$ の交換特性は使わないで，そのまま形式的に計算すると，

$$H_0^{\text{formal}} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \hbar\omega(\boldsymbol{k})\,\{\hat{a}(\boldsymbol{k})^*\hat{a}(\boldsymbol{k})+\hat{a}(\boldsymbol{k})\hat{a}(\boldsymbol{k})^*\}\,d\boldsymbol{k} \tag{0.53}$$

が得られる．そこで，(0.41) を使えば，

$$H_0^{\text{formal}} = \hat{H}_0 + \frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{0})\int_{\mathbb{R}^d} \hbar\omega(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k} \tag{0.54}$$

となる．明らかに，右辺第 2 項は発散しており，数学的に意味がない．これは，場の量子化に伴う発散の一種である．この発散の困難は，単に右辺第 2 項を捨てることによって回避される[25]．この処方はもっとも簡単なくりこみの 1 つをあたえる．

ここに現れた発散の困難とくりこみの処方は，作用素 $\hat{a}(\boldsymbol{k})^\sharp$ ($\hat{a}(\boldsymbol{k})^\sharp$ は $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ または $\hat{a}(\boldsymbol{k})^*$ を表す) の積に関するある種の正則化と関連している．(0.54) の右辺第 2 項を捨てることは，(0.53) の右辺において，交換関係を使わずに，単に $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ を $\hat{a}(\boldsymbol{k})^*$ の右側にもっていく操作に対応する．この操作を : : で表し，$:\hat{a}(\boldsymbol{k})\hat{a}(\boldsymbol{k})^*: = \hat{a}(\boldsymbol{k})^*\hat{a}(\boldsymbol{k})$ を $\hat{a}(\boldsymbol{k})\hat{a}(\boldsymbol{k})^*$ の **Wick (ウィック) 積**とよぶ．一般に，生成・消滅作用素 $\hat{a}(\boldsymbol{k})^\sharp$ の何個かの積 $A=\hat{a}(\boldsymbol{k}_1)^{n_1}\hat{a}(\boldsymbol{p}_1)^{*m_1}\cdots\hat{a}(\boldsymbol{k}_r)^{n_r}\hat{a}(\boldsymbol{p}_r)^{*m_r}$ に対して，その Wick 積 $:A:$ は

---

[24] 4 章，8 章，9 章を参照．

[25] 9 章で見るように，$\hat{H}_0$ には数学的に厳密な意味づけができる．

$$:A:=\hat{a}(\boldsymbol{p}_1)^{*m_1}\cdots\hat{a}(\boldsymbol{p}_r)^{*m_r}\hat{a}(\boldsymbol{k}_1)^{n_1}\cdots\hat{a}(\boldsymbol{k}_r)^{n_r} \tag{0.55}$$

によって定義される (A のような積の有限 1 次結合に対しては，線形性によって拡張する)．つまり，Wick 積をとることは，消滅作用素をすべて生成作用素の右側にもっていくことにほかならない (生成作用素どうし，消滅作用素どうしはそれぞれ可換なので，生成作用素どうし，あるいは消滅作用素どうしの積においては，積の順序は問題にならないことに注意)．ただし，この定義において注意しなければならないのは，Wick 積を施す作用素 A を構成する生成・消滅作用素に対しては，交換関係は適用されないということである．こうして，Wick 積を通して，古典論との形式的対応がなされる：

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &=: H_0^{\text{formal}}: \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} :\hat{\pi}(x)^2+(\nabla\hat{\phi}(x))^2+m^2\hat{\phi}(x)^2: d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{0.56}$$

上の説明から了解されるように，Wick 積をとることは，作用素値超関数であると予想される $\hat{\phi}(x)$, $\hat{\pi}(x)$ の積 (上の場合は 2 個の積) から生じる，ある種の発散を除くことにほかならない．したがって，それは，作用素値超関数の積に対する，一種の正則化 (regularization) をあたえる．

他の種類の自由場の量子化については，高橋 (1979) にわかりやすい解説がある．

0-2-6　相互作用がある場合の形式解の構成

ハミルトニアンは，量子化された理論にうつっても，形式的には，時間に依存しないので，**時刻 0 の場** (time-zero field) $\hat{\phi}(0,\boldsymbol{x})$, $\hat{\pi}(0,\boldsymbol{x})$ を用いて，

$$H_\lambda^{\text{formal}} := H_\lambda(\hat{\phi}(0,\cdot),\hat{\pi}(0,\cdot)) \tag{0.57}$$

と書かれる．このことに注意すると，方程式 (0.27) は，形式的に次のようにして “解く” ことができる．

まず，CCR をみたす作用素の任意の対 $\{\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x}),\hat{\pi}_0(\boldsymbol{x})\}$ があったと仮定する：

$$[\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x}),\hat{\pi}_0(\boldsymbol{y})] = i\hbar\delta^d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{0.58}$$

$$[\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x}),\hat{\phi}_0(\boldsymbol{y})] = 0 = [\hat{\pi}_0(\boldsymbol{x}),\hat{\pi}_0(\boldsymbol{y})]. \tag{0.59}$$

これを用いて，ハミルトニアン

$$H := H_\lambda(\hat{\phi}_0,\hat{\pi}_0) \tag{0.60}$$

が自己共役作用素として定義されると仮定し，

$$\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x}) = e^{itH/\hbar}\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x})e^{-itH/\hbar}, \quad \hat{\pi}(t,\boldsymbol{x}) = e^{itH/\hbar}\hat{\pi}_0(\boldsymbol{x})e^{-itH/\hbar} \tag{0.61}$$

とおく．明らかに $\hat{\phi}(0,\boldsymbol{x}) = \hat{\phi}_0(\boldsymbol{x})$, $\hat{\pi}(0,\boldsymbol{x}) = \hat{\pi}_0(\boldsymbol{x})$．作用素 $\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x})$, $\hat{\pi}(t,\boldsymbol{x})$ は **Heisenberg 場**とよばれる．このとき，$\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x})$ は

$$\frac{\partial\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \hat{\pi}(t,\boldsymbol{x}) \tag{0.62}$$

と場の方程式 (0.27) を形式的にみたすことが次のようにして示される．まず，

$$\frac{\partial\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}e^{itH/\hbar}[H,\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x})]e^{-itH/\hbar}.$$

一方，CCR (0.58), (0.59) を使うと，

$$[H,\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x})] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}[\hat{\pi}_0(\boldsymbol{y})^2,\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{y} = -i\hbar\hat{\pi}_0(\boldsymbol{x}).$$

したがって，

$$\frac{\partial\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = e^{itH/\hbar}\hat{\pi}_0(\boldsymbol{x})e^{-itH/\hbar} = \hat{\pi}(t,\boldsymbol{x}). \tag{0.63}$$

これは (0.62) にほかならない．

(0.63) をさらに t で微分すると，

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2} = \frac{i}{\hbar}e^{itH/\hbar}[H,\hat{\pi}_0(\boldsymbol{x})]e^{-itH/\hbar}. \tag{0.64}$$

再び，CCR (0.58), (0.59) によって，

$$\begin{aligned}[H,\hat{\pi}_0(\boldsymbol{x})] &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\sum_{j=1}^d(\partial_j\hat{\phi}_0(\boldsymbol{y}))^2 + m^2\hat{\phi}_0(\boldsymbol{y})^2 + \lambda P(\hat{\phi}_0(\boldsymbol{y})),\hat{\pi}_0(\boldsymbol{x})\right]d\boldsymbol{y} \\ &= i\hbar\left\{-\sum_{j=1}^d\partial_j^2\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x}) + m^2\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x}) + \lambda P'(\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x}))\right\}.\end{aligned}$$

これを (0.64) に代入すれば，場の方程式 (0.27) が得られる．

もちろん，いま述べた計算は，発見法的なものであるから，数学的に正当であるかどうかは疑わしい．だが，作用素値方程式としての (0.27) の解の構成の (1 つの) 仕方が示唆されたという意味では重要である．この方法では，CCR をみたす時刻 0 の場 $\hat{\phi}_0(\boldsymbol{x})$, $\hat{\pi}_0(\boldsymbol{x})$ とそれから定まるハミルトニアン H が基本的な対象となる．

0-2-7 真空期待値

さて，仮に量子場 $\hat{\phi}(x)$ やハミルトニアン $H_\lambda^{\mathrm{formal}}$ が何らかの意味で存在したとし，さらに，$H_\lambda^{\mathrm{formal}}$ のスペクトルの下限 $E_0(\lambda)$ が固有値であると仮定しよう．このとき，

$E_0(\lambda)$ に属する $H_\lambda^{\text{formal}}$ の (規格化された) 固有ベクトル Ω_λ は，$P(\phi)_\nu$ モデルの**真空** (vacuum) あるいは**基底状態** (ground state) とよばれる：$H_\lambda^{\text{formal}}\Omega_\lambda = E_0(\lambda)\Omega_\lambda$. このとき，場の積の**真空期待値**

$$W_n^\lambda(x_1, \cdots, x_n) := \langle \Omega_\lambda, \hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)\Omega_\lambda\rangle_{\mathfrak{H}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

が重要な対象になる．ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{H}}$ はヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の内積である．これは，公理論的場の量子論では，**Wightman (ワイトマン) 超関数**とよばれる (7 章を参照)．超関数列 $\{W_n^\lambda\}_{n=0}^\infty$ は，素粒子の散乱現象や束縛状態に関する情報をあたえることを発見法的・形式的に示すことができる．ところが，W_n^λ を摂動法を使って素朴に計算すると，発散の困難に出会う．ここで，摂動法というのは，W_n^λ を

$$W_n^\lambda = W_n^{(0)} + \lambda W_n^{(1)} + \lambda^2 W_n^{(2)} + \cdots$$

というふうに λ の形式的ベキ級数 — 形式的摂動級数— に展開し，その展開の “係数” として現われる超関数 $W_n^{(j)}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ を順次計算してゆく方法である．$W_n^{(0)}$ は，$\lambda = 0$ の場合，すなわち，自由場の理論における真空期待値であり，きちんと定義され，特殊関数を用いて書かれる超関数である (9 章を参照)．超関数 $W_n^{(j)}$ $(j \geq 1)$ はある種の積分であたえられるが，$W_n^{(j)}$ の中に発散するものが現われるのである．この現われ方は時空の次元 ν と相互作用の形 P に依存する．ν および P の次数が低いほど発散の程度は弱くなる．しかし，相対論的共変性等を考慮して，$W_n^{(j)}$ をあたえる発散積分から有限量をうまくとりだすことが可能である場合があり — これも時空の次元 ν と相互作用の形 P に依存する —，この処方をあたえるのがくりこみ理論である．詳細については，たとえば，Steinmann (1993) を参照せよ[26]．

0-2-8　CCR の表現の問題

ヒルベルト空間上に (0.24a), (0.24b) をみたす作用素値超関数の組 $\{\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x}), \hat{\pi}(t, \boldsymbol{x})\}$ を実現することを (連続体 $\mathbb{R}^d$ に関する) **無限自由度の CCR の表現** という[27]．上述の $P(\phi)_\nu$ モデルにおけるように，あるクラスの場の量子論における諸々の物理量 (ハミルトニアン，運動量，角運動量等) を表す作用素は，CCR の表現を素材としてつく

---

26) 場の量子論における摂動計算と発散の問題については，たとえば，江沢-新井 (1988) の 1 章，1.4 節を参照.

27) ここでは，発見法的な側面が問題なので，CCR の表現の数学的に厳密な定義はあたえない．本書の 4 章，4-8 節，新井-江沢 (1999b) の 4 章，4.4 節を参照.

られる[28]．この意味で，CCR の表現をどう選ぶかは物理と直接関わってくる重要な事柄である．そこで，CCR (0.24a), (0.24b) の表現がユニタリ同値を除いて，どのくらいあるかが問題になる[29]．これは，量子場の方程式 (0.27) の形式解を構成するときの時刻 0 の場の取り方，したがって，ユニタリ同値でない解がどのくらいありうるかという問題に関わる．結論から言えば，たがいにユニタリ同値でない，CCR (0.24a), (0.24b) の表現は無数にある[30]．それゆえ，1 つの古典場の理論に対応する，量子場の理論には，ユニタリ同値でないものが数多くありうることが示唆される[31]．

ちなみに，場の量子化に際して，CCR と相対論的共変性が両立するためには，場の相互作用の形 — $P(\phi)_\nu$ モデルの場合でいえば，多項式 P の形 — が制限されることが知られている．特に ϕ_ν^4 モデルの場合には，$\nu \geq 5$ ならば，自由場しか存在しえない，という注目すべき (否定的) 結果が得られている (Baumann (1989))．つまり，相対論的不変性の要求に加えて，CCR を課すことは，かなりきつい条件であることが暗示される[32]．

上述のことを考慮した場合，場の量子論の数学的構造を研究するにあたっては，CCR の表現をあらかじめ特定しない方法が有効になる可能性がある．このアイデアは，C^* 代数や von Neumann (フォンノイマン) 代数を用いる，代数的アプローチによって展開された[33]．C^* 代数や von Neumann 代数は有界作用素の代数として表現される．しかし，ハミルトニアンや量子場は一般には有界作用素とは限らないので，非有界作用

---

28) スピンとよばれる量子数 — これは素粒子の内部自由度の回転に関する角運動量を表す — が半整数 $(1/2, 3/2, \cdots)$ である素粒子 (たとえば，電子) の場を量子化する場合には，**正準反交換関係** (canonical anti-commutation relations)

$$\{\psi_j(t,\boldsymbol{x}), \pi_l(t,\boldsymbol{y})\} = i\hbar\delta_{jl}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad \{\psi_j(t,\boldsymbol{x}), \psi_l(t,\boldsymbol{y})\} = 0, \quad \{\pi_j(t,\boldsymbol{x}), \pi_l(t,\boldsymbol{y})\} = 0,$$

が要請される．ここで，$\{A, B\} := AB + BA$ は反交換子，$\psi(t,\boldsymbol{x}) = (\psi_j(t,\boldsymbol{x}))_{j=1}^N$ は当該の場 (N 成分の場)，$\pi(t,\boldsymbol{x}) = (\pi_j(t,\boldsymbol{x}))_{j=1}^N$ はその正準共役運動量である．CCR は，スピンが整数 $(0, 1, 2, \cdots)$ の素粒子の場の量子化に対して要請される．

29) ユニタリ同値な CCR の表現によって記述される理論は物理的に同等であると解釈される．

30) 本書の 4 章，4-8 節を参照．

31) 有限自由度の CCR の表現の場合は，それが Weyl 型であれば，von Neumann (1931) の定理によって，各自由度ごとに本質的に 1 つしかない．だが，もともとの形の CCR の表現 (0.26) については，たがいにユニタリ同値でないなものは数多くある．そのような表現で物理的に興味あるものが，Reeh (1988), Arai (1992b, 1993b, 1995b, 1995c, 1996b, 1998), Kurose and Nakazato (1996), Hirokawa (1997) によって研究されている．数学的な例については，Fuglede (1967), Dorfmeister and Dorfmeister (1984), Schmüdgen (1983a, 1983b) 等を参照．

32) これは，4 次元時空において，自由場の理論と同値でない，非自明な相対論的な場の量子論を構築するのが困難であることと関連している．この問題については，江沢-新井 (1988) を参照．

33) たとえば，Araki (1969), 荒木 (1993), Baez, Segal and Zhou (1992), Haag (1992) 等を参照．

素の代数を直接あつかうアプローチも有効な方法になりうる．この方向の研究については Schmüdgen (1990)，Inoue (1998) とそこに引用されている文献を参照せよ．本書では，これらの代数的アプローチにはふれない．

0-2-9　場の形式的な Schrödinger 表現 — 汎関数的 Schrödinger 作用素

有限自由度の量子力学において，よく知られているように，ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ において，

$$Q_j^{\mathrm{S}} := x_j \quad (x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N \text{ の第 } j \text{ 成分 } x_j \text{ によるかけ算作用素}),$$

$$P_j^{\mathrm{S}} := -i\hbar D_j \quad (D_j \text{ は } x_j \text{ に関する一般化された偏微分作用素})$$

によって定義される作用素は自己共役であり，$\{Q_j^{\mathrm{S}}, P_j^{\mathrm{S}}\}_{j=1}^N$ は，N 自由度の CCR (0.26) の表現の 1 つをあたえる．すなわち，$Q_j = Q_j^{\mathrm{S}}$, $P_j = P_j^{\mathrm{S}}$ として，(0.26) が稠密な部分空間 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 上で成立する[34]．この表現は，CCR の **Schrödinger(シュレーディンガー) 表現**とよばれる．この表現の 1 つの特徴は，Q_j が，座標関数によるかけ算作用素 Q_j^{S} であたえられているということであり，このことによって，ある種の解析はやりやすくなる．たとえば，量子力学的ハミルトニアン

$$H_{\mathrm{QM}} := \frac{1}{2M} \sum_{j=1}^N P_j^2 + V(Q_1, \cdots, Q_N)$$

($M > 0$ は定数，$V : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$) は，Schrödinger 表現では，Schrödinger 作用素

$$H_{\mathrm{QM}}^{\mathrm{S}} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V$$

になる ($\Delta := \sum_{j=1}^N D_j^2$ はラプラシアン)．

無限自由度の CCR の表現で，有限自由度の場合の CCR の Schrödinger 表現に対応するものを形式的につくることができることを見ておきたい．これは，本書では割愛するが，自由場の確率論的記述に対する 1 つの動機づけをあたえるものであり[35]，また，物理の文献を読む場合の参考に供する意味もある．そのために，まず，導汎関数の概念を導入する．

自然数 $n_1, \cdots, n_p$ と $\mathbb{R}^{n_j}$ 上の関数 f_j に対して，$\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_p} = \mathbb{R}^{n_1 + \cdots + n_p}$ 上の関数 $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_p$ を

---

[34] 新井 (1997a) の 6 章 6.4 節を参照．

[35] 江沢-新井 (1988) を参照．

$$(f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_p)(x_1, \cdots, x_p) = \prod_{j=1}^{p} f_j(x_j), \quad x_j \in \mathbb{R}^{n_j},$$

によって定義する．

$\mathbb{R}^d$ 上の緩増加超関数の空間を $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ と記し[36)]，任意の元 $\varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ と $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\langle \varphi, f \rangle := \varphi(f), \tag{0.65}$$

とおく．実数値の急減少関数の全体を $\mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ で表す．$\mathscr{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の実緩増加超関数の全体とし，$\mathscr{W}$ を $\mathscr{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ の部分空間で $\{\varphi + f \,|\, \varphi \in \mathscr{W},\ f \in \mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)\} \subset \mathscr{W}$ をみたすものとし，$F : \mathscr{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathscr{W}$ 上の汎関数 ($\mathscr{W}$ から $\mathbb{C}$ への写像) とする．もし，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\varphi + \varepsilon f) - F(\varphi)}{\varepsilon} = \langle DF(\varphi), f \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{W},\ f \in \mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d), \tag{0.66}$$

をみたす $DF(\varphi) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ が存在するならば，$DF(\varphi)$ を F の 1 階の**導汎関数** (functional derivative) とよび，記号的に

$$DF(\varphi)(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta F(\varphi)}{\delta \varphi(\boldsymbol{x})} \tag{0.67}$$

と記す．さらに，任意の $f_1,\ f_2 \in \mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\langle DF(\varphi + \varepsilon f_2), f_1 \rangle - \langle DF(\varphi), f_1 \rangle}{\varepsilon} = \langle D^2 F(\varphi), f_1 \times f_2 \rangle \tag{0.68}$$

をみたす，$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の対称な緩増加超関数 $D^2 F(\varphi)$ が存在するとき，これを F の 2 階の導汎関数とよび，記号的に

$$D^2 F(\varphi)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\delta^2 F(\varphi)}{\delta \varphi(\boldsymbol{x}) \delta \varphi(\boldsymbol{y})} \tag{0.69}$$

と記す．

以下，同様にして，F の n 階の導汎関数

$$D^n F(\varphi)(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) := \frac{\delta^n F(\varphi)}{\delta \varphi(\boldsymbol{x}_1) \cdots \delta \varphi(\boldsymbol{x}_n)} \tag{0.70}$$

が，帰納的に，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\langle D^{n-1} F(\varphi + \varepsilon f_n), f_1 \times \cdots \times f_{n-1} \rangle - \langle D^{n-1} F(\varphi), f_1 \times \cdots \times f_{n-1} \rangle}{\varepsilon}$$

$$= \langle D^n F(\varphi), f_1 \times \cdots \times f_n \rangle, \quad f_j \in \mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d),\ j = 1, \cdots, n, \tag{0.71}$$

[36)] 付録 D を参照.

をみたす，$(\mathbb{R}^d)^n$ 上の対称な緩増加超関数として定義される．

例 0-1　任意の $f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して定まる $\mathscr{W}$ 上の汎関数

$$F_{f_1,\cdots,f_n}(\varphi) = \langle\varphi, f_1\rangle\cdots\langle\varphi, f_n\rangle, \tag{0.72}$$

に関して，

$$\frac{\delta F_{f_1,\cdots,f_n}(\varphi)}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})} = \sum_{j=1}^{n} f_j(\boldsymbol{x})\langle\varphi, f_1\rangle\cdots\widehat{\langle\varphi, f_j\rangle}\cdots\langle\varphi, f_n\rangle$$

と計算される．ここで，$\widehat{\langle\varphi, f_j\rangle}$ は，和において，因子 $\langle\varphi, f_j\rangle$ を除くことを指示する記号である．同様にして，

$$\frac{\delta F_{f_1,\cdots,f_n}(\varphi)}{\delta\varphi(\boldsymbol{x}_1)\delta\varphi(\boldsymbol{x}_2)} = \sum_{i\neq j}^{n} f_i(\boldsymbol{x}_1)f_j(\boldsymbol{x}_2)\langle\varphi, f_1\rangle\cdots\widehat{\langle\varphi, f_i\rangle}\cdots\widehat{\langle\varphi, f_j\rangle}\cdots\langle\varphi, f_n\rangle,$$

$$\frac{\delta F_{f_1,\cdots,f_n}(\varphi)}{\delta\varphi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\delta\varphi(\boldsymbol{x}_n)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} f_1(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)})\cdots f_n(x_{\sigma(n)}),$$

$$\frac{\delta F_{f_1,\cdots,f_n}(\varphi)}{\delta\varphi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\delta\varphi(\boldsymbol{x}_p)} = 0, \quad p > n$$

が成立する．ここで，$\mathfrak{S}_n$ は n 文字 $\{1,\cdots,n\}$ の置換群である．

定数汎関数 1 と $F_{f_1,\cdots,f_n}$ という形の ($\mathscr{W}$ 上の) 汎関数によって生成される部分空間を $\mathbb{P}(\mathscr{W})$ としよう．このとき，各 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathbb{P}(\mathscr{W})$ を定義域とする作用素

$$\phi_{\mathrm{S}}(f) := \langle\varphi, f\rangle, \tag{0.73}$$

$$\pi_{\mathrm{S}}(f) := -i\hbar\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, f(\boldsymbol{x})\frac{\delta}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})}, \tag{0.74}$$

を考える．ただし，

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, f(\boldsymbol{x})\frac{\delta}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})}\right)F(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\delta F(\varphi)}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \quad F\in\mathbb{P}(\mathscr{W}). \tag{0.75}$$

容易にわかるように，

$$[\phi_{\mathrm{S}}(f), \pi_{\mathrm{S}}(g)] = i\hbar\langle f, g\rangle, \tag{0.76}$$

$$[\phi_{\mathrm{S}}(f), \phi_{\mathrm{S}}(g)] = 0 = [\pi_{\mathrm{S}}(f), \pi_{\mathrm{S}}(g)], \quad f,\, g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{0.77}$$

が成立する．すなわち，

$$\phi_{\mathrm{S}}(f) = \int\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \quad \pi_{\mathrm{S}}(f) = \int\pi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \tag{0.78}$$

によって作用素値超関数核 $\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})$, $\pi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})$ を導入すれば，$\{\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}), \pi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})\}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}$ は CCR (0.24a), (0.24b) の 1 つの表現をあたえる．定義からわかるように，$\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})$ は "座標" $\varphi(\boldsymbol{x})$ による "かけ算作用素" である．この理由により，$\{\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}), \pi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})\}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}$ を**時刻 0 の場の Schrödinger 表現**とよぶ．

以上の議論は，$\mathscr{W}$ が $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の部分空間である場合にも全く同様になされうることは明らかであろう．ただ，上の場合，実スカラー場の量子化を問題にしているので，$f \in \mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ のとき，$\phi_{\mathrm{S}}(f)$, $\pi_{\mathrm{S}}(f)$ が，無限次元空間

$$M(\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}) := \mathbb{R}^d \text{ から } \mathbb{R} \text{ への写像の全体} \tag{0.79}$$

の上の，形式的ルベーグ測度 $D\varphi :=$ "$\prod_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} d\varphi(\boldsymbol{x})$" に関する形式的 L^2 空間 "$L^2\big(M(\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}), D\varphi\big)$" 上の形式的作用素としてエルミートであるようにしたかったのである．

上の表現における形式的ハミルトニアンを

$$H_{\mathrm{S}} := H_\lambda(\phi_{\mathrm{S}}, \pi_{\mathrm{S}}) \tag{0.80}$$

とすれば，それは，(0.21) によって，

$$H_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left\{-\hbar^2\frac{\delta^2}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})^2} + |\nabla\varphi(\boldsymbol{x})|^2 + m^2\varphi(\boldsymbol{x})^2\right\}d\boldsymbol{x} + \lambda\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, P(\varphi(\boldsymbol{x})) \tag{0.81}$$

という形であたえられる．これから，H_{S} は，有限次元の Schrödinger 作用素の無限次元版をあたえることがわかる．そこで，H_{S} を**汎関数的 Schrödinger 作用素**という．

部分空間 $\mathscr{W}$ が $\mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ に等しい場合には，H_{S} は，確かに，$\mathbb{P}(\mathscr{W})$ 上で定義される．しかし，$\mathscr{W}$ が $\mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ よりももっと大きな空間で，$\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\varphi(\boldsymbol{x})|^2\,d\boldsymbol{x}$, $\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\boldsymbol{x})|^2\,d\boldsymbol{x}$, $\int_{\mathbb{R}^d}P(\varphi(\boldsymbol{x}))\,d\boldsymbol{x}$ 等が存在しないような要素 φ を含むならば，そのような φ に対しては (0.81) の右辺は意味をもたないから，H_{S} は，$\mathbb{P}(\mathscr{W})$ においてさえ，定義されないことになる．ここに，Schrödinger 表現での量子化にともなう発散の困難が現れている．こうしたことに加えて，そもそも，$\phi_{\mathrm{S}}(f)$ や $\pi_{\mathrm{S}}(f)$ あるいは H_{S} を自己共役作用素として実現するためのヒルベルト空間をどのように構成するかが問題になる．有限自由度の場合のアナロジーから言えば，それは，描像としては，"$L^2\left(M(\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}), D\varphi\right)$" とするのが自然であろう．だが，残念ながら，$D\varphi$ は存在しないのでそのようなヒルベルト空間は構成できない．それでは，Schrödinger 表現は

意味のないものかというと決してそうではなく，次のような発見法的手続きをふむことにより，少なくとも自由場に関しては，厳密な理論が構成できる地点へと到達することができる．

まず，Δ を $\mathbb{R}^d$ 上の一般化されたラプラシアンとし ($\Delta := \sum_{j=1}^{d} D_j^2$)，汎関数

$$\Omega_0(\varphi) := e^{-\langle\varphi,(-\Delta+m^2)^{1/2}\varphi\rangle/2\hbar}$$

を考える．もちろん，この場合，φ は

$$\langle\varphi,(-\Delta+m^2)^{1/2}\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}(\boldsymbol{k}^2+m^2)^{1/2}|\hat{\varphi}(\boldsymbol{k})|^2\,d\boldsymbol{k} < \infty$$

をみたす実緩増加超関数であるとしなければならない．ここで，

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,d\boldsymbol{x}$$

は φ のフーリエ変換を表す．さて，"$\Omega_0(\varphi)^2\,D\varphi$" は数学的に意味をもつ有限測度の形式的シンボルであると仮定しよう (これは実際正しい)．そこで，$d\mu(\varphi) = \Omega_0(\varphi)^2\,D\varphi$ とおき，$L^2\left(M(\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}), D\varphi\right)$ から $L^2\left(M(\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}), d\mu(\varphi)\right)$ への形式的ユニタリ変換

$$UF(\varphi) = \Omega_0(\varphi)^{-1}F(\varphi)$$

を考える．この変換のもとで，$\phi_{\mathrm{S}}(f), \pi_{\mathrm{S}}(f)$ $(f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ は，形式的に

$$U\phi_{\mathrm{S}}(f)U^{-1} = \langle\varphi, f\rangle,$$

$$U\pi_{\mathrm{S}}(f)U^{-1} = -i\hbar\int_{\mathbb{R}^d}d\boldsymbol{x}\,f(\boldsymbol{x})\frac{\delta}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})} + i\int_{\mathbb{R}^d}f(\boldsymbol{x})(-\Delta+m^2)^{1/2}\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

と変換する．したがって，$\phi_{\mathrm{S}}(f)$ は変換の後も "座標汎関数" $\langle\varphi, f\rangle$ によるかけ算作用素である．こうして，上記の Schrödinger 表現 $\{\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}), \pi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})\}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}$ にユニタリ変換 U を施しても，CCR を実現する片方の作用素がかけ算作用素であたえられるという，Schrödinger 表現の特性は保存されることがわかる．そこで，視点を移動して，$L^2\left(M(\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}), d\mu(\varphi)\right)$ がシンボルであるようなヒルベルト空間を厳密に構成し，その上に，$U\phi_{\mathrm{S}}(f)U^{-1}, U\pi_{\mathrm{S}}(f)U^{-1}$ に対応する作用素を定義することを考えるのである．実際，このアイディアは実現可能であり，ヒルベルト空間を添字集合とするガウス確率過程の概念へと導く．この概念を展開することにより，Schrödinger 表現による自由場の理論が構成される．詳細については江沢-新井 (1988)，新井 (1997b) を参照．

注意 0-4 上の発見法的議論は，1 次元の場合で言えば，要するに，$L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$ へのユニタリ変換 $(uf)(x) = e^{x^2/2}f(x)$ $(f \in L^2(\mathbb{R}))$ を考えていることに相当する．2 次元以上の場合も同様である．

汎関数 Ω_0 は，$\lambda = 0$ の場合の H_{S}，すなわち，Schrödinger 表現における自由場の形式的ハミルトニアン

$$H_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}} := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left\{-\hbar^2\frac{\delta^2}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})^2} + |\nabla\varphi(\boldsymbol{x})|^2 + m^2\varphi(\boldsymbol{x})^2\right\}d\boldsymbol{x}$$

の基底状態である．実際，作用素 $(-\Delta + m^2)^{1/2}$ の形式的超関数積分核を $(-\Delta + m^2)^{1/2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，すなわち，

$$(-\Delta + m^2)^{1/2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{1/2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,d\boldsymbol{k}$$

とし，

$$E_0 = \frac{\hbar}{2}\int_{\mathbb{R}^d}(-\Delta + m^2)^{1/2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

とおけば (これは無限大であるが，いまは形式的に進む)，

$$H_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}d\boldsymbol{x}\left(\hbar\frac{\delta}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})} - (-\Delta + m^2)^{1/2}\varphi(\boldsymbol{x})\right)$$
$$\times\left(-\hbar\frac{\delta}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})} - (-\Delta + m^2)^{1/2}\varphi(\boldsymbol{x})\right) + E_0.$$

したがって，"$L^2\left(M(\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}), D\varphi\right)$" 上の形式的作用素として，$H_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}} \geq E_0$ (上式の右辺第 1 項は形式的に非負の作用素であることに注意)．さらに，

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})}\Omega_0(\varphi) = -\hbar^{-1}(-\Delta + m^2)^{1/2}\varphi(\boldsymbol{x})\Omega_0(\varphi),$$

すなわち，

$$\left(-\hbar\frac{\delta}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})} - (-\Delta + m^2)^{1/2}\varphi(\boldsymbol{x})\right)\Omega_0 = 0$$

であるから，

$$H_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}}\Omega_0 = E_0\Omega_0.$$

したがって，Ω_0 は $H_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}}$ の形式的な基底状態である．

いま現われた発散の困難，すなわち，$E_0 = \infty$ となることを回避するには，この無限大を引き去った形式的作用素 $\hat{H}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}} = H_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}} - E_0$ をあらためて，自由場のハミルト

ニアンと思いなおし — これは "エネルギーのくりこみ" とよばれる —，上述の形式的ユニタリ変換を経由して，$\tilde{H}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}} = U\hat{H}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}}U^{-1}$ に数学的な意味をつければよい (実際，これは可能である)．$U\Omega_0 = 1$ であるから，$\tilde{H}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{free}}1 = 0$ が成立する．

0-3 節　汎関数積分の方法 — Feynman の経路積分法

この方法は，Feynman (1948) の創始になるものである (Feynman and Hibbs (1965) も参照)．ふたたび，$P(\phi)_\nu$ モデルを例にとろう．(0.18) であたえられる古典的ラグランジュ密度関数 $\mathscr{L}_\lambda$ から作用積分

$$S_\lambda(\phi) := \int_{\mathbf{R}^\nu} \mathscr{L}_\lambda(x)\, dx \tag{0.82}$$

をつくり，形式的な無限次元積分

$$G_n(x_1, \cdots, x_n) := C^{-1} \int_{M(\mathbf{R}^\nu \longrightarrow \mathbf{R})} \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) e^{iS_\lambda(\phi)/\hbar}\, D\phi \tag{0.83}$$

を考える．$D\phi = \prod_{x\in\mathbf{R}^\nu} d\phi(x)$ は 1 次元 Lebesgue 測度 $d\phi(x)$ — 時空の各点 x に 1 次元 Lebesgue 測度 $d\phi(x)$ が付随していると考える — の形式的な連続無限直積測度であり，

$$C := \int_{M(\mathbf{R}^\nu \longrightarrow \mathbf{R})} e^{iS_\lambda(\phi)/\hbar}\, D\phi \tag{0.84}$$

は形式的規格化因子である．ここに登場する形式的測度 $D\phi/C$ を "Feynman 測度" という．もちろん，この種の無限次元積分 — これを**汎関数積分** (functional integral) とか**経路積分** (path integral) とよぶ — が数学的に意味のある対象として存在するかどうかは別問題である．実は，これは数学的には極めて難しい問題なのである．

詳しい説明は省略せざるをえないが，0-2 節で述べたハミルトン形式との対応は，関係式

$$G_n(x_1, \cdots, x_n) = W_n^\lambda(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \quad ; \quad t_{\sigma(1)} > t_{\sigma(2)} > \cdots > t_{\sigma(n)} \text{ のとき}$$

$$x_j = (t_j, \boldsymbol{x}^j), \quad j = 1, \cdots, n, \tag{0.85}$$

であたえられる．右辺のもともとの定義にもどれば，$G_n(x_1, \cdots, x_n)$ は，**時間に関して順序づけられた場の真空期待値** (time-ordered vacuum expectation value)，つまり，場を時刻が早い順に右から並べてできる作用素の真空期待値を表すことがわかる．これは n 点 **Green (グリーン) 関数**ともよばれる．こうして，汎関数積分による量子化の方法とハミルトン形式によるそれとは形式的には同等な理論をあたえる．汎関数

積分による量子化の形式的議論のもっと詳しい事柄については，たとえば，Schulman (1981), Rivers (1987), Swanson (1992) 等を参照．汎関数積分法に対する数学的に厳密なアプローチについては，Albeverio and Hoegh-Krohn (1976), Albeverio et al (1989), Glimm and Jaffe (1987), Simon (1979)，江沢-新井 (1988)，中村 (1998)，藤原 (1999) 等が参考になろう．

0-4 節　汎関数微分方程式による方法 — Schwinger 方程式

Schwinger は，外場 = 源 (source) の作用に対してその応答をみる，というアイデアのもとに場の量子化に対する独自の方法を創始した．この方法は**源の理論** (source theory) とよばれる (Schwinger (1951, 1970, 1973))．ここでは，この方法を汎関数積分の方法との関連で述べよう．(0.83) において，

$$d\mu_\lambda(\phi) := C^{-1}\exp(iS_\lambda(\phi)/\hbar)\,D\phi \tag{0.86}$$

を 1 つの "複素確率測度" とみなし，その特性汎関数

$$Z_\lambda(J) = \int e^{i\langle\phi,J\rangle/\hbar}\,d\mu_\lambda(\phi) \tag{0.87}$$

を考える．ここで，$J\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ であり，$\langle\phi,J\rangle$ は (0.65) によって定義される．関数 J は，物理的には，"源" を表す．指数汎関数 $\exp(i\langle\phi,J\rangle/\hbar)$ をベキ級数展開し，積分と和の順序を形式的に入れ換えれば，

$$Z_\lambda(J) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{\nu n}}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n G_n(x_1,\cdots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n)\,dx_1\cdots dx_n \tag{0.88}$$

となるので，$Z_\lambda(J)$ は Green 関数の列 $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(G_0:=1)$ の**母汎関数** (generating functional) とみなすことができる．1 変数の特殊関数論などにおいてみられるように，母関数を考えることはしばしば有用であり，問題の見通しをよくする可能性がある．$Z_\lambda(J)$ を考えるのは，数学的にはこれと同じ理由による．ここまでは，まだ，汎関数積分法の範疇にあるのであるが，源理論のアイデアは，$Z_\lambda(J)$ に対する微分方程式 — これは J に関する汎関数微分方程式になる — を導き，むしろ，これを出発点にとりなおすことにある．そうすると，すくなくとも外見上は，数学的に疑義のある汎関数積分は消え，方程式論として場の量子化を考えることが可能になるのである．

母汎関数 $Z_\lambda(J)$ に対する汎関数微分方程式を形式的に導こう．まず，

$$J(x)Z_\lambda(J) = -i\hbar\int\left(\frac{\delta}{\delta\phi(x)}e^{i\langle\phi,J\rangle/\hbar}\right)e^{iS_\lambda(\phi)/\hbar}C^{-1}\,D\phi$$

に注意して，形式的に部分積分をおこなうと

$$J(x)Z_\lambda(J) = i\hbar \int e^{i\langle\phi,J\rangle/\hbar} \frac{\delta}{\delta\phi(x)} e^{iS_\lambda(\phi)/\hbar} C^{-1}\, D\phi$$

$$= \int \left\{(\Box + m^2)\phi(x) + \lambda P'(\phi(x))\right\} e^{i\langle\phi,J\rangle/\hbar}\, d\mu_\lambda(\phi).$$

一方，

$$-i\hbar \frac{\delta}{\delta J(x)} Z_\lambda(J) = \int \phi(x) e^{i\langle\phi,J\rangle/\hbar}\, d\mu_\lambda.$$

したがって，

$$\int \left\{(\Box + m^2)\phi(x) + \lambda P'(\phi(x))\right\} e^{i\langle\phi,J\rangle/\hbar}\, d\mu_\lambda(\phi)$$

$$= (\Box + m^2)(-i\hbar)\frac{\delta}{\delta J(x)} Z_\lambda(J) + \lambda P'\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) Z_\lambda(J).$$

よって，形式的な意味で，

$$(\Box + m^2)(-i\hbar)\frac{\delta Z_\lambda(J)}{\delta J(x)} + \lambda P'\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) Z_\lambda(J) = J(x)Z_\lambda(J) \qquad (0.89)$$

が得られる．ここで，高階の導汎関数の同一時空点での値 $\delta^n Z_\lambda(J)/\delta J(x)^n$ は，さしあたり，形式的に

$$\frac{\delta^n Z_\lambda(J)}{\delta J(x)^n} = \lim_{x_j \to x, j=1,\cdots,n} \frac{\delta^n Z_\lambda(J)}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}$$

とみなす．また，明らかに，

$$Z_\lambda(0) = 1. \qquad (0.90)$$

これは境界条件の 1 つとみなされるべき式である．(0.89), (0.90) が求める汎関数微分方程式である．これらを $P(\phi)_\nu$ モデルの **Schwinger 方程式**あるいは **Schwinger-Dyson (ダイソン) 方程式**という．

この方程式は，もともとの古典場の方程式 (0.15) を外場 J のある方程式

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) + \lambda P'(\phi(x)) = J(x) \qquad (0.91)$$

に拡張し，$\phi(x)$ を汎関数微分作用素 $-i\hbar\delta/\delta J(x)$ で置き換え，そうしてできる汎関数微分作用素を J の汎関数 $Z_\lambda(J)$ に施すことによっても得られることに注意しよう．つまり，Schwinger 方程式は，古典場の理論から，ある種の対応規則によって得られるのである．この対応規則をこの場合の “量子化” とみなすことができる (図 0-1 を参照).

この方法による量子化においては，Schwinger 方程式の解 $Z_\lambda(J)$ を求めることが問

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) + \lambda P'(\phi(x)) = 0 \text{ (古典場の方程式)}$$

$$\Big\downarrow \text{ 外場 } J \text{ を加える}$$

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) + \lambda P'(\phi(x)) = J(x)$$

$$\Big\downarrow \; \phi(x) \to -i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)} \text{ (置き換え)}$$

$$\left(\Box + m^2\right)\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \lambda P'\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) = J(x)$$

$$\Big\downarrow \; Z_\lambda(J) \text{ に作用}$$

$$\left(\Box + m^2\right)(-i\hbar)\frac{\delta}{\delta J(x)}Z_\lambda(J) + \lambda P'\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)Z_\lambda(J) = J(x)Z_\lambda(J)$$

図 0-1　古典場の方程式から Schwinger 方程式への対応規則.

題になる．こうして，Schwinger の方法は，数学的には汎関数微分方程式論 (無限変数の微分方程式論) と関連してくる．Schwinger 方程式を数学的に研究することの重要性は，すでに 1950 年代の初めに，Gel'fand (1954) によって説かれた (Gel'fand and Minlos (1954)，井上 (1990) も参照)．この量子化では，"時間に関して順序づけられた真空期待値"，すなわち，n 点 Green 関数は，形式的な表示 (0.88) を考慮して，

$$G_n(x_1, \cdots, x_n) := (-i\hbar)^n \left.\frac{\delta^n Z_\lambda(J)}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} \tag{0.92}$$

によって定義されることになる．

しかし，Schwinger 方程式にうつったからといって，場の量子化にともなう数学的困難が解消されたわけではない．この場合の困難は，同一時空点における高階の導汎関数の核 $\delta^n Z_\lambda(J)/\delta J(x)^n$ $(n \geq 2)$ の定義において生じる．すでに述べたように，高階の導汎関数

$$\frac{\delta^n Z_\lambda(J)}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}$$

は，一般には超関数であるから，$\delta^n Z_\lambda(J)/\delta J(x)^n$ のような量が数学的に意味をもつとは限らないのである．これは，正準量子化のときに，$\hat{\phi}(x)$ の積が一般には意味をもたないことに対応している．したがって，$\delta^n Z_\lambda(J)/\delta J(x)^n$ に相当する量を数学的にきちんと定義するには，何らかの正則化 (くりこみ) が必要とされる．そのような正則化の 1 つの定義は Arai (1983c) においてあたえられた．時空が 2 次元の場合 $(\nu = 2)$，(0.89) をユークリッド化し — すなわち，t を虚数時間 it で置き換える — かつ正則化して得られる方程式の解の存在を示すことができる (Arai (1983c), 江沢-新井 (1988)).

例 0-2　自由場の Schwinger 方程式の解. $\lambda = 0$ の場合，すなわち，自由場の場合の Schwinger 方程式

$$(\Box + m^2)(-i\hbar)\frac{\delta Z_0(J)}{\delta J(x)} = J(x)Z_0(J), \quad Z_0(0) = 1, \tag{0.93}$$

は容易に解くことができ，その 1 つの解は，

$$Z_0(J) = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\int_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} K(x,y)J(x)J(y)\,dxdy\right) \tag{0.94}$$

であたえられる．ただし，$K(x,y)$ は $-(\Box + m^2)$ の対称な基本解，すなわち，

$$(\Box + m^2)K(x,y) = -\delta^\nu(x-y), \quad K(x,y) = K(y,x), \tag{0.95}$$

をみたす緩増加超関数である．実際，この $Z_0(J)$ が (0.93) をみたすことは直接計算により，容易に確かめられる．

こうして，$-(\Box + m^2)$ の対称な基本解のそれぞれに対して，自由場に対応する Schwinger 方程式 (0.93) の解が定まることがわかる．他の量子化との対応を考慮することにより，通常，基本解 $K(x,y)$ として，**Feynman の伝播（でんぱ）関数** (propagator) とよばれる超関数

$$\Delta_F(x-y) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\, dp \tag{0.96}$$

が採用される．ここで，$p = (p^0, p^1, \cdots, p^d)$, $q = (q^0, q^1, \cdots, q^d) \in \mathbb{R}^\nu$ に対して，

$$pq := p^0 q^0 - \sum_{j=1}^{d} p^j q^j \tag{0.97}$$

はミンコフスキー内積を表す[37)]．

(0.93) を含む，あるクラスの 1 階の Schwinger 方程式の解法と解の一意性は Arai (1986) によって研究されている．非相対論的な量子場のモデルの Schwinger 方程式の研究については，Inoue (1986) がある．

ノート

場の量子論に関する物理の教科書は今や非常にたくさん出版されており，それぞれの特徴を備えている．波動場の量子化について実に明晰に説いている教科書として，朝永 (1997b) がある．高橋 (1979) も入門者にはわかりやすいと思われる．

---

37) Δ_F の厳密な定義については 9 章を参照.

場の量子論全般については，たとえば，Itzykson and Zuber (1980) に多くの情報が盛られている．だが，これは，必要に応じて，事典的に使う本かもしれない．

素粒子物理学については，たとえば，Halzen and Martin (1984), 武田-宮沢 (1974)，長島 (1999a, 1999b, 1999c, 1999d) がある．

場の量子論が物質の諸性質の解明のためにどのように使われるかを知るには，たとえば，高野 (1975)，高橋 (1974, 1976)，永長 (1995) が参考になる．

この序章では，場の量子論の歴史的発展についてはふれることができなかったが，場の量子論の方法を用いて，もっとも成功したのは物質と光 (電磁場) の相互作用を記述する**量子電磁力学** (quantum electrodynamics; 通常，QED と略される) であり，その自然な拡張としての**ゲージ場の量子論**である[38]．この理論形式は，物質界に働く四種の基本力，すなわち，重力，電磁気力，強い力，弱い力を統合する理論 — **統一理論** — を構築するための有力な形式と目されているものである．実際，電磁気力と弱い力の統一理論はすでに創られている．

その他の重要な発展として，**超対称的場の量子論** (supersymmetric quantum field theory) や**超弦 (superstring) 理論**がある[39]．

これと関連して，**位相的場の量子論** (topological quantum field theory) と呼ばれる分野も確立された (Witten (1988), Atiyah (1989), Nash (1991))．これは数学的には場の量子論的な手法でもって位相空間の構造 (位相不変量) を研究しようとするものである (河野 (1998) を参照)．

超対称性と解析的整数論との関連も見いだされた (Spector (1990))．この関連の厳密な定式化と一般化が Arai (1999e) においてなされている．

ヒルベルト空間の係数体を 4 元数へと広げることによって，従来の量子力学や場の量子論を拡張する試みもある (Adler (1995))．

最近，ゲージ場の理論への新しいアプローチとして，A. Connes (コンヌ) による**非可換幾何学**の方法が注目されている (Connes (1990, 1994), Grosse, Klimčik and Prešnajder (1996), Grosse and Strohmaier (1999))．

この章の本文の中でも少しふれたように，場の量子論は，現在においてもなお多くの数学的な問題をはらんでいる．本文で例にあげた $P(\phi)_\nu$ モデルに関しては，$\nu = 2$ の場合，すなわち，時空が 2 次元の場合には，数学的に厳密な理論が構成され，その性質が詳しく調べられている (Simon (1974), Glimm and Jaffe (1985, 1987), 江沢-新井 (1988) 等を参照)．しかし，4 次元時空の場合には，最も扱いやすいとされる ϕ_4^4 モデルでさえ構成されていない．この場合には，$P(\phi)_2$ モデルの場合に使われた数学的方法 — 格子近似の方法 — では自明なもの，すなわち，自由場と同値な理論しかつくれないことが (比較的自然な仮定のもとで) 示される (江沢-新井 (1988), Fernández, Fröhlich and Sokal (1992) 等を参照)．つまり，尋常な方法では非自明な ϕ_4^4 モデルを構成することができないことが示唆されるのである．4 次元時空での QED やゲージ場の量子論の数学的構成も重要な課題として残されている．くりこみの問題については，

---

[38] 入門書として Aitchson (1982) がある．

[39] Bailin and Love (1994)，Kaku (1988) 等を参照．

たとえば，江沢ほか (1994) や Salmhofer (1999) を参照.

場の量子論を数学的に厳密な方法で研究するためには，物理の本や論文を "物理的に" 読むことと並んで，そうした作業を通してあらわになってくる数学的な問題点を明晰にとらえることが必要である．物理の本の多くは，数学的には厳密に書かれていない点に留意すべきである．だが，物理学者が行なう物理的考察や発見法的・形式的な計算もそれはそれとして "追試" できなければならない．物理における場の量子論の文献には，いまだ真の姿をとって現れていない数学的理念が隠されている．これを明るみに出すことが数理物理学者や数学者の任務の 1 つである．

序章演習問題

以下の問題は，この章の主旨に照らして，形式的・発見法的に解くだけでもよい．問題 1 ～ 4 については厳密な定式化が可能である．

♮**1.** (0.9) を示せ.

ヒント　合成関数の微分法により

$$\partial_0 \tilde{\mathscr{L}} = \sum_{r=1}^{n} \left\{ \dot{\phi}_r \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \phi_r} + (\partial_\mu \dot{\phi}_r) \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \right\}$$
$$= \sum_{r=1}^{n} \left\{ \dot{\phi}_r \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \phi_r} + (\partial_0^2 \phi_r)\pi_r + \sum_{j=1}^{d} (\partial_j \dot{\phi}_r) \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_j \phi_r)} \right\}.$$

これと場の方程式 (0.3) を用いて

$$\frac{dH}{dx^0} = -\sum_{r=1}^{n} \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{j=1}^{d} \partial_j \left(\dot{\phi}_r \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_j \phi_r)} \right) d\boldsymbol{x}$$

を導き，ガウスの湧出量 (発散) 定理を適用せよ．ただし，関数 $\dot{\phi}_r \dfrac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_j \phi_r)}$ $(r = 1, \cdots, n)$ は無限遠で十分速く 0 になるとする.

♮**2.** (0.13) を示せ.

ヒント　場の方程式 (0.3) を使うと

$$\partial_0 \mathscr{P}_j(x) = \sum_{r=1}^{n} \left\{ \pi_r \partial_j \dot{\phi}_r + (\partial_j \phi_r) \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \phi_r} - (\partial_j \phi_r) \sum_{k=1}^{d} \partial_k \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_k \phi_r)} \right\}.$$

他方，合成関数の微分法により

$$\partial_j \tilde{\mathscr{L}} = \sum_{j=1}^{n} \left\{ (\partial_j \phi_r) \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \phi_r} + (\partial_j \dot{\phi}_r)\pi_r + \sum_{k=1}^{d} (\partial_j \partial_k \phi_r) \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_k \phi_r)} \right\}.$$

これら 2 つの式から

$$\frac{dP_j}{dx^0} = \int_{\mathbf{R}^d} \left\{ \partial_j \tilde{\mathscr{L}} - \sum_{k=1}^{d} \partial_k \left(\sum_{r=1}^{n} (\partial_j \phi_r) \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_k \phi_r)} \right) \right\} d\boldsymbol{x}$$

を導き，ガウスの湧出量 (発散) 定理を適用せよ．ただし，関数 $\tilde{\mathscr{L}}$, $(\partial_j\phi_r)\dfrac{\partial\tilde{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_k\phi_r)}$ $(r = 1,\cdots,n; j, = 1,\cdots,d)$ は無限遠で十分速く 0 になるとする．

3. ϕ は (0.15) 式にしたがう実スカラー場であるとし，$d=3$ の場合を考え，

$$L_1 := \int_{\mathbf{R}^3}\left\{\dot{\phi}(x)x^2\partial_3\phi(x) - \dot{\phi}(x)x^3\partial_2\phi(x)\right\}d\boldsymbol{x},$$

$$L_2 := \int_{\mathbf{R}^3}\left\{\dot{\phi}(x)x^3\partial_1\phi(x) - \dot{\phi}(x)x^1\partial_3\phi(x)\right\}d\boldsymbol{x},$$

$$L_3 := \int_{\mathbf{R}^3}\left\{\dot{\phi}(x)x^1\partial_2\phi(x) - \dot{\phi}(x)x^2\partial_1\phi(x)\right\}d\boldsymbol{x},$$

を定義する．このとき，各 $j = 1,2,3$ に対して，L_j は時刻によらないこと，すなわち，$dL_j/dx^0 = 0$ を示せ．

ヒント　dL_j/dx^0 において，$\partial_0^2\phi$ を (0.15) を用いて書き換え，部分積分を実行せよ．

注意　(L_1, L_2, L_3) は考察下のスカラー場の**軌道角運動量**を表す．上の事実は，軌道角運動量が保存されることを示している．

♮**4.** (0.38) を導け．

ヒント　フーリエ変換が $L^2(\mathbb{R}^d)$ — $\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数 ψ で，$\int_{\mathbf{R}^d}|\psi(\boldsymbol{x})|^2\,d\boldsymbol{x} < \infty$ をみたすものから形成されるヒルベルト空間[40] — の内積を不変にすること[41]を用いると簡単に計算できる．つまり，

$$H_0 = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}\{\partial_t\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k})^*\partial_t\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k}) + |\boldsymbol{k}|^2\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k})^*\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k}) + m^2\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k})^*\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k})\}\,d\boldsymbol{k}.$$

♮**5.** (0.50), (0.51) によって定義される形式的作用素 $\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x}), \hat{\pi}(t,\boldsymbol{x})$ が CCR (0.24a), (0.24b) をみたすことを示せ．

ヒント　(0.41), (0.42) とデルタ超関数に関する象徴的表示

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}^d}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,d\boldsymbol{k}$$

(付録 D の例 D-12 を参照) を用いよ．

---

[40] 詳しくは，新井 (1997a) の 1 章，例 1.16，新井-江沢 (1999a) の 1 章，例 1.15 を参照．

[41] 新井 (1997a) の 5 章，定理 5.3 を参照．

第 1 章

ヒルベルト空間のテンソル積

任意の複数個のヒルベルト空間の組に対して，それらのテンソル積とよばれるヒルベルト空間を定義し，基本的な性質を調べる．ヒルベルト空間のテンソル積の重要な例の 1 つとして L^2 空間のテンソル積をとりあげる．また，ヒルベルト空間値の L^2 関数からなるヒルベルト空間とテンソル積の関係を論じる．さらに，対称テンソル積，反対称テンソル積を導入する．これらは，多粒子系の量子力学的状態を記述するための重要なヒルベルト空間である．

1-1 節　共役双線形形式とテンソル積

はじめに，この章の主題に対する，純数学的な動機について簡単に述べておく[1]．基本的な着想は次のようなものである．複数のヒルベルト空間があたえられたとき，これらから何か別のヒルベルト空間を構成できないであろうか？　この問いに肯定的に応える鍵は，数学における演算の基本形態である加法と乗法の理念に目を向けることである．複数のヒルベルト空間に加法の理念を適用して得られるのがヒルベルト空間の直和の概念である[2]．では，乗法の理念は何を生み出すか？　この問いは，ヒルベルト空間の間に，いかにして合理的に乗法的な概念が定義されうるか，という問題へと人を導く．ここに，本章の主題であるヒルベルト空間のテンソル積の概念へと向かう 1 つの着想がある[3]．

本書では，ヒルベルト空間といえば，特に断らない限り，複素ヒルベルト空間をさす．

---

[1] 場の量子論との関連については，本書の叙述が進む中で明らかにされる．

[2] 新井 (1997a) の 1 章，1.3 節，1.3.3 項を参照．

[3] ここで述べた発想は，ヒルベルト空間に限らず，もっと一般の位相ベクトル空間へと向けることができ，位相ベクトル空間のテンソル積の理論へと連なる (たとえば，Trèves (1967))．もっと言えば，この種の着想は，数学の領域のいたるところで陰に陽に働いている．

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ の内積，ノルムをそれぞれ，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$，$\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ のように表す．ただし，内積の準双線形性に関するスカラーの出方は，$\langle\Psi,\alpha\Phi\rangle_{\mathscr{H}}=\alpha\langle\Psi,\Phi\rangle_{\mathscr{H}}$ ($\Psi,\Phi\in\mathscr{H}$, $\alpha\in\mathbb{C}$ (複素数の全体)) とする (右側のベクトルに関して線形，左側のベクトルに関して共役線形 (反線形))．また，どのヒルベルト空間の内積あるいはノルムであるかが文脈から明らかな場合は，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$，$\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ をしばしば単に $\langle\cdot,\cdot\rangle$，$\|\cdot\|$ と記す．複素数 z の共役複素数を z^* または $\bar{z}$ で表す．

ある一般的な概念の定義から始めよう．$\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ を複素ベクトル空間とし，これらの直積空間

$$\mathscr{V}\times\mathscr{W}:=\{(\psi,\phi)\,|\,\psi\in\mathscr{V},\ \phi\in\mathscr{W}\} \tag{1.1}$$

を考える[4)]．$F:\mathscr{V}\times\mathscr{W}\longrightarrow\mathbb{C}$ を $\mathscr{V}\times\mathscr{W}$ から $\mathbb{C}$ への写像とする．すべての ψ, ψ_1, $\psi_2\in\mathscr{V}$, ϕ, ϕ_1, $\phi_2\in\mathscr{W}$ および $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して，

$$F(\psi_1+\psi_2,\phi)=F(\psi_1,\phi)+F(\psi_2,\phi), \tag{1.2a}$$

$$F(\psi,\phi_1+\phi_2)=F(\psi,\phi_1)+F(\psi,\phi_2), \tag{1.2b}$$

$$F(\alpha\psi,\phi)=F(\psi,\alpha\phi)=\alpha^*F(\psi,\phi) \tag{1.2c}$$

が成立するとき，F は $\mathscr{V}\times\mathscr{W}$ 上の**共役双線形形式** (conjugate bilinear form) または**共役双線形汎関数** (conjugate bilinear functional) であるといわれる．性質 (1.2a)〜(1.2c) を**共役双線形性**という．

注意 1-1 上の定義において，スカラー倍の法則性 (1.2c) を変えることにより，次のように，別の 2 変数汎関数の概念を定義することができる：

(i) F が (1.2a), (1.2b) と

$$F(\alpha\psi,\phi)=\alpha^*F(\psi,\phi),\quad F(\psi,\alpha\phi)=\alpha F(\psi,\phi),\quad \psi\in\mathscr{V},\phi\in\mathscr{W},\alpha\in\mathbb{C}$$

をみたすとき，F を**準双線形形式** (sesqui-linear form) という．

(ii) F が (1.2a), (1.2b) と

$$F(\alpha\psi,\phi)=F(\psi,\alpha\phi)=\alpha F(\psi,\phi),\quad \psi\in\mathscr{V},\phi\in\mathscr{W},\alpha\in\mathbb{C}$$

をみたすとき，F を**双線形形式** (bilinear form) または**双線形汎関数** (bilinear functional) という．

---

4) $A:=B$ は B によって A を定義する記法である．本書では，特に，等式が定義であることをはっきりさせたい場合に用いる．

F が $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ 上の双線形形式ならば，$F^\dagger(\psi, \phi) := F(\psi, \phi)^*$ $(\psi \in \mathscr{V}, \phi \in \mathscr{W})$ によって定義される写像 $F^\dagger$ は共役双線形形式である．逆に，G が $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ 上の共役双線形形式ならば，$G^\dagger$ は双線形形式である．

例 1-1　ベクトル空間 $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ が有限次元の場合を考えよう．$\dim \mathscr{V} = m$, $\dim \mathscr{W} = n$ とし ($\dim \mathscr{V}$ は $\mathscr{V}$ の次元を表す)，$\{v_i\}_{i=1}^m$, $\{w_j\}_{j=1}^n$ をそれぞれ，$\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ の基底とする．したがって，任意の $v \in \mathscr{V}$, $w \in \mathscr{W}$ は $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i(v) v_i$, $w = \sum_{j=1}^n \beta_j(w) w_j$ と一意に表される．ただし，$\alpha_i(v) \in \mathbb{C}$, $\beta_j(w) \in \mathbb{C}$ はそれぞれ，v, w から一意に決まる定数である．任意の m 行 n 列の複素行列 $A = (A_{ij})$ $(i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n)$ に対して，写像 $F_A : \mathscr{V} \times \mathscr{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$F_A(v, w) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \alpha_i(v)^* \beta_j(w)^*$$

によって定義する．この写像は $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ 上の共役双線形形式である．これは，写像：$v \longrightarrow \alpha_i(v)$ $(v \in \mathscr{V})$ および写像：$w \longrightarrow \beta_j(w)$ $(w \in \mathscr{W})$ が線形であることに注意すれば容易にわかる．

写像 F_A の変形として，

$$F_A^{(1)}(v, w) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \alpha_i(v)^* \beta_j(w), \quad F_A^{(2)}(v, w) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \alpha_i(v) \beta_j(w)$$

$(v \in \mathscr{V}, w \in \mathscr{W})$ を定義すると，$F_A^{(1)}$ は $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ 上の準双線形形式，$F_A^{(2)}$ は $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ 上の双線形形式である．

例 1-2　d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数で有界な台をもつものの全体を $C_0(\mathbb{R}^d)$ で表す[5)]．この集合は，関数の和とスカラー倍に関して複素ベクトル空間になる．

一般に，$0 < p < \infty$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ可測関数 f で

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

— 積分はルベーグ積分の意味でとる — をみたすものの全体を $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ で表す．任意

---

5) $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f の台 (support) とは，f の値が 0 でない点全体の閉包

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}}$$

である (集合 S に対して，$\overline{S}$ は S の閉包を表す)．$\mathbb{R}^d$ の部分集合 S が有界であるとは，ある定数 $R > 0$ があって，$S \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq R\}$ が成立する場合をいう．

の $K \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ と $f,\, g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |K(x,y)f(x)g(y)|\, dxdy \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |K(x,y)|\, dxdy < \infty$$

であるから $(\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|)$,

$$F_K(f,g) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x,y) f(x)^* g(y)^*\, dxdy$$

によって，写像 $F_K : C_0(\mathbb{R}^d) \times C_0(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ が定義される．これは共役双線形である．

次のように定義される写像 $F_K^{(1)}, F_K^{(2)}$ はそれぞれ，$C_0(\mathbb{R}^d) \times C_0(\mathbb{R}^d)$ 上の準双線形形式，双線形形式である．

$$F_K^{(1)}(f,g) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x,y) f(x)^* g(y)\, dxdy,$$

$$F_K^{(2)}(f,g) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} K(x,y) f(x) g(y)\, dxdy, \quad f,\, g \in C_0(\mathbb{R}^d).$$

F を $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ 上の共役双線形形式としよう．共役双線形性 (1.2a)∼(1.2c) を繰り返し使うことにより，すべての $\alpha_j,\, \beta_k \in \mathbb{C},\, \psi_j \in \mathscr{V},\, \phi_k \in \mathscr{W}$ $(j = 1, \cdots, m,\, k = 1, \cdots, n,\, m,\, n \in \mathbb{N})$ ($\mathbb{N}$ は自然数の集合) に対して，

$$F\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \psi_j, \sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k\right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j^* \beta_k^* F(\psi_j, \phi_k) \tag{1.3}$$

が成り立つことがわかる (問題 1).

直積空間 $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ 上の共役双線形形式の全体を $\mathscr{L}_*(\mathscr{V} \times \mathscr{W})$ と記す．任意の $F,\, G \in \mathscr{L}_*(\mathscr{V} \times \mathscr{W})$ に対して，和 $F+G$ とスカラー倍 αF $(\alpha \in \mathbb{C})$ を

$$(F+G)(\psi,\phi) := F(\psi,\phi) + G(\psi,\phi), \tag{1.4a}$$

$$(\alpha F)(\psi,\phi) := \alpha F(\psi,\phi), \quad (\psi,\phi) \in \mathscr{V} \times \mathscr{W}, \tag{1.4b}$$

によって定義すれば，$F+G,\, \alpha F \in \mathscr{L}_*(\mathscr{V} \times \mathscr{W})$ であり，$\mathscr{L}_*(\mathscr{V} \times \mathscr{W})$ は，この和とスカラー倍に関してベクトル空間になる (問題 2).

さて，$\mathscr{H}_1,\, \mathscr{H}_2$ をヒルベルト空間とする．各ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}_1,\, \Phi \in \mathscr{H}_2$ に対して，写像 $\Psi \otimes \Phi : \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$(\Psi \otimes \Phi)(\psi,\phi) := \langle \psi, \Psi \rangle_{\mathscr{H}_1} \langle \phi, \Phi \rangle_{\mathscr{H}_2}, \quad (\psi,\phi) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2, \tag{1.5}$$

によって定義する．このとき，$\Psi \otimes \Phi \in \mathscr{L}_*(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ である．容易にわかるように，

すべての $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{C}$, $\Psi_j \in \mathscr{H}_1$, $\Phi_k \in \mathscr{H}_2$ $(j = 1, \cdots, m,\ k = 1, \cdots, n,\ n,\ m \in \mathbb{N})$ に対して

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Psi_j\right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \Phi_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \beta_k (\Psi_j \otimes \Phi_k) \tag{1.6}$$

が成立する．

一般に，ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の部分集合 $\mathscr{D}$ から生成される部分空間を $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ または単に $\mathscr{L}\mathscr{D}$ のように表す．

$\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ をそれぞれ，$\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ の部分空間としよう．このとき，$\Psi \otimes \Phi$ $(\Psi \in \mathscr{D}_1, \Phi \in \mathscr{D}_2)$ によって生成される，$\mathscr{L}_*(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ の部分空間

$$\mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2 := \mathscr{L}\left\{\Psi \otimes \Phi \,|\, \Psi \in \mathscr{D}_1,\ \Phi \in \mathscr{D}_2\right\} \tag{1.7}$$

を $\mathscr{D}_1$ と $\mathscr{D}_2$ の**代数的テンソル積** (algebraic tensor product) という．$\mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2$ の元で $\Psi \otimes \Phi$ $(\Psi \in \mathscr{D}_1, \Phi \in \mathscr{D}_2)$ という形をしているものを $\mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2$ の**純テンソル**とよぶ．明らかに，

$$\mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2 \subset \mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2. \tag{1.8}$$

代数的テンソル積 $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ の中に内積が導入できることを示そう．そのために，まず，このベクトル空間上に準双線形形式 $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ を

$$\langle \Psi \otimes \Phi, \Psi' \otimes \Phi' \rangle := \langle \Psi, \Psi' \rangle_{\mathscr{H}_1} \langle \Phi, \Phi' \rangle_{\mathscr{H}_2}, \quad \Psi, \Psi' \in \mathscr{H}_1,\ \Phi, \Phi' \in \mathscr{H}_2, \tag{1.9}$$

によって定義する．$\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ の任意の元に対しては，線形性により拡張する．すなわち，任意の $\Psi_j, \Psi'_l \in \mathscr{H}_1$, $\Phi_k, \Phi'_m \in \mathscr{H}_2$, $\alpha_{jk}, \beta_{lm} \in \mathbb{C}$ $(j, k = 1, \cdots, N,\ l, m = 1, \cdots, M,\ N, M \in \mathbb{N})$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left\langle \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_{jk} \Psi_j \otimes \Phi_k,\ \sum_{l,m=1}^{M} \beta_{lm} \Psi'_l \otimes \Phi'_m \right\rangle \\
&:= \sum_{j,k=1}^{N} \sum_{l,m=1}^{M} \alpha^*_{jk} \beta_{lm} \langle \Psi_j \otimes \Phi_k, \Psi'_l \otimes \Phi'_m \rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{N} \sum_{l,m=1}^{M} \alpha^*_{jk} \beta_{lm} \langle \Psi_j, \Psi'_l \rangle_{\mathscr{H}_1} \langle \Phi_k, \Phi'_m \rangle_{\mathscr{H}_2}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

しかし，この場合，注意しなければならないのは，$\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ の元を純テンソルの 1 次結合として表す仕方は一般には 1 通りとは限らないから，$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ の定義が意味をもつためには，任意の $F, G \in \mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ に対して，$\langle F, G \rangle$ は，F, G を純テンソルの 1 次結合として表す仕方によらないことを示す必要がある．実際，これは次のようにして

なされる．元 $F \in \mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ が $F_1,\ F_2 \in \mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ を用いて，$F = F_1 = F_2$ と表されたとする．ただし，F_1, F_2 は純テンソルの 1 次結合であるとする．そこで，$F_0 := F_1 - F_2$ とおけば，任意の $\psi \in \mathscr{H}_1,\ \phi \in \mathscr{H}_2$ に対して，$F_0(\psi, \phi) = 0$．一方，$\Psi \otimes \Phi$ と $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ の定義から，$(\Psi \otimes \Phi)(\psi, \phi) = \langle \psi \otimes \phi, \Psi \otimes \Phi \rangle$ $(\Psi,\ \psi \in \mathscr{H}_1,\ \Phi,\ \phi \in \mathscr{H}_2)$．したがって，任意の $G \in \mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ に対して，$G(\psi, \phi) = \langle \psi \otimes \phi, G \rangle$．特に，$G = F_0$ とすれば，$\langle \psi \otimes \phi, F_0 \rangle = 0$ が任意の $\psi \in \mathscr{H}_1,\ \phi \in \mathscr{H}_2$ に対して成り立つ．ゆえに，すべての $G \in \mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ に対して $\langle G, F_0 \rangle = 0$．したがって，$\langle G, F_1 \rangle = \langle G, F_2 \rangle$．これから，$G$ が $G = G_1 = G_2$ $(G_j \in \mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2,\ j = 1, 2)$ と 2 通りに，純テンソルの 1 次結合で表されたとすれば，$\langle G_1, F_1 \rangle = \langle G_1, F_2 \rangle = \langle G_2, F_2 \rangle$．ゆえに，望む結果が示された．

補題 1-1　(1.10) によって定義される，$\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ 上の準双線形形式 $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ は内積である．

証明　内積の対称性と線形性は明らかであるから正定値性だけを示す．$F = \sum_{j,k=1}^{N} \alpha_{jk} \Psi_j \otimes \Xi_k$ $(\Psi_j \in \mathscr{H}_1,\ \Xi_k \in \mathscr{H}_2,\ \alpha_{jk} \in \mathbb{C},\ N \in \mathbb{N})$ としよう．$\Phi_j = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} \Xi_k$ とおけば，$F = \sum_{j=1}^{N} \Psi_j \otimes \Phi_j$ と書ける．$\mathscr{M}_1,\ \mathscr{M}_2$ を，それぞれ，$\{\Psi_j\}_{j=1}^{N},\ \{\Phi_j\}_{j=1}^{N}$ で張られる部分空間とする．$\mathscr{M}_1,\ \mathscr{M}_2$ の正規直交基底を，それぞれ，$\{e_k\}_{k=1}^{N_1},\ \{f_l\}_{l=1}^{N_2}$ とすれば，$\Psi_j = \sum_{k=1}^{N_1} a_{jk} e_k,\ \Phi_j = \sum_{l=1}^{N_2} b_{jl} f_l$ と表される．ここで，$a_{jk},\ b_{jl}$ は複素定数である．したがって，$c_{kl} := \sum_{j=1}^{m} a_{jk} b_{jl}$ とすれば，$F = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} c_{kl}(e_k \otimes f_l)$．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\langle F, F \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} c_{kl}(e_k \otimes f_l), \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{mn}(e_m \otimes f_n) \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{kl}^* c_{mn} \langle e_k \otimes f_l, e_m \otimes f_n \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{kl}^* c_{mn} \langle e_k, e_m \rangle \langle f_l, f_n \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} |c_{kl}|^2.
\end{aligned}
$$

これは，$\langle F, F \rangle \geq 0$ および「$\langle F, F \rangle = 0$ ならば $c_{kl} = 0$，したがって，$F = 0$」を意

味する．ゆえに，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は正定値である．　□

上の補題により，次の定義が可能になる．

定義 1-2　(1.10) で定義される内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して，$\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ を完備化[6]して得られるヒルベルト空間を $\mathscr{H}_1$ と $\mathscr{H}_2$ の**テンソル積ヒルベルト空間** (tensor product Hilbert space) または単に**テンソル積**といい，$\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ と記す．

内積空間の完備化の仕方により，$\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ は，$\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ において稠密な部分空間と同一視される．

次の命題は，ヒルベルト空間のテンソル積の基本的構造に関するものである．

命題 1-3

(i)　$\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ がそれぞれ，$\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ の稠密な部分空間であるならば，$\mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2$ は $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ で稠密である．

(ii)　$\{\Psi_k\}_{k=1}^M, \{\Phi_l\}_{l=1}^N$ $(M, N \leq \infty)$ が，それぞれ，$\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ の完全正規直交系 (complete orthonormal system; 以下，CONS と略す) ならば，$\{\Psi_k \otimes \Phi_l \,|\, k = 1, \cdots, M,\, l = 1, \cdots, N\}$ は $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ の CONS である．

証明　(i) 定義 1-2 のすぐあとに述べた事実により，$\mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2$ が $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ で稠密であることを示せばよい．そこで，$\Psi \in \mathscr{H}_1, \Phi \in \mathscr{H}_2$ としよう．このとき，$\Psi_n \longrightarrow \Psi, \Phi_n \longrightarrow \Phi$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる $\Psi_n \in \mathscr{D}_1, \Phi_n \in \mathscr{D}_2$ がとれる．$\{\Phi_n\}_n$ は収束列であるから，$C := \sup_n \|\Phi_n\| < \infty$．$\Theta_n = \Psi_n \otimes \Phi_n$ とおくと，$\Theta_n \in \mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2$ であり，

$$\Theta_n - \Psi \otimes \Phi = (\Psi_n - \Psi) \otimes \Phi_n + \Psi \otimes (\Phi_n - \Phi).$$

したがって，

$$\begin{aligned}\|\Theta_n - \Psi \otimes \Phi\| &\leq \|(\Psi_n - \Psi) \otimes \Phi_n\| + \|\Psi \otimes (\Phi_n - \Phi)\| \\ &\leq C\|\Psi_n - \Psi\| + \|\Psi\|\|\Phi_n - \Phi\| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

ゆえに，$\lim_{n\to\infty} \Theta_n = \Psi \otimes \Phi$．この結果は，$\mathscr{D}_1 \hat{\otimes} \mathscr{D}_2$ が $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ で稠密であることを意味する．

(ii) $M = N = \infty$ の場合だけを証明する．他の場合も同様である．$\{\Psi_k \otimes \Phi_l\}_{k,l=1}^\infty$ が正規直交系であることは (1.9) から容易にわかる．これが完全であることを証明する

[6] ヒルベルト空間の完備化については，新井-江沢 (1999a) の 1 章，1.4 節，1.4.4 項を参照．

には，$\mathscr{M}$ を $\{\Psi_k \otimes \Phi_l\}_{k,l=1}^{\infty}$ によって生成される部分空間の閉包とするとき，

$$\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2 \subset \mathscr{M} \tag{$*$}$$

を示せばよい．実際，これができたとすれば，$\mathscr{M}$ は稠密な閉部分空間であることになり，したがって，$\mathscr{M}$ は $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ に一致しなければならない．ゆえに，正規直交系 $\{\Psi_k \otimes \Phi_l\}_{k,l=1}^{\infty}$ は完全であることが結論される．

さて，$\Psi \otimes \Phi \in \mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$ とすれば，$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Psi_k$, $\Phi = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \Phi_l$ と展開できる．ここで，$a_k = \langle \Psi_k, \Psi \rangle$, $b_l = \langle \Phi_l, \Phi \rangle$ であり，

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad \|\Phi\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} |b_l|^2 < \infty \tag{$**$}$$

が成り立つ．直接計算により

$$\left\| \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} a_k b_l \Psi_k \otimes \Phi_l - \Psi \otimes \Phi \right\|^2 = \|\Psi\|^2 \|\Phi\|^2 - \left(\sum_{k=1}^{M} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{N} |b_l|^2 \right).$$

この右辺は，$(**)$ によって，$M, N \longrightarrow \infty$ のとき，0 に収束するから，$\Psi \otimes \Phi = \lim_{M,N \to \infty} \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} a_k b_l \Psi_k \otimes \Phi_l$．したがって，$\Psi \otimes \Phi \in \mathscr{M}$．これは $(*)$ を意味する．□

3 個以上の有限個のヒルベルト空間の組に対しても，2 つのヒルベルト空間の場合と同様にして，それらのテンソル積を定義することができる．

$n \geq 2$ を自然数とする．n 個の複素ベクトル空間 $\mathscr{V}_1, \cdots, \mathscr{V}_n$ の元の組の全体

$$\mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_n := \{(\psi_1, \cdots, \psi_n) \,|\, \psi_j \in \mathscr{V}_j,\, j = 1, \cdots, n\} \tag{1.11}$$

を $\mathscr{V}_1, \cdots, \mathscr{V}_n$ の**直積空間**あるいは単に**直積** (direct product) という．1 つのベクトル空間 $\mathscr{V}$ の n 個の直積を $\mathscr{V}^n$ と記す：

$$\mathscr{V}^n := \underbrace{\mathscr{V} \times \cdots \times \mathscr{V}}_{n\,個}.$$

直積 $\mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_n$ から $\mathbb{C}$ への写像 F は，各 $j = 1, \cdots, n$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$, $\psi_k \in \mathscr{V}_k$ $(k = 1, \cdots, n)$, $\phi_j \in \mathscr{V}_j$ に対して，

$$F(\psi_1, \cdots, \psi_j + \phi_j, \cdots, \psi_n)$$

$$= F(\psi_1, \cdots, \psi_j, \cdots, \psi_n) + F(\psi_1, \cdots, \phi_j, \cdots, \psi_n), \tag{1.12a}$$

$$F(\psi_1, \cdots, \alpha\psi_j, \cdots, \psi_n) = \alpha^* F(\psi_1, \cdots, \psi_j, \cdots, \psi_n), \tag{1.12b}$$

をみたすとき，$\mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_n$ 上の**共役 n 重線形形式**あるいは**共役 n 重線形汎関数**と

よばれる．これは，共役双線形形式の一般化である．(1.12a), (1.12b) を繰り返し使うと，任意の $\alpha_{jk_j} \in \mathbb{C}$, $\psi_{jk_j} \in \mathscr{V}_j$ ($j = 1, \cdots, n$, $k_j = 1, \cdots, N_j$, $N_j \in \mathbb{N}$) に対して，

$$F\left(\sum_{k_1=1}^{N_1} \alpha_{1k_1}\psi_{1k_1}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{N_n} \alpha_{nk_n}\psi_{nk_n}\right)$$
$$= \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} \alpha_{1k_1}^* \cdots \alpha_{nk_n}^* F(\psi_{1k_1}, \cdots, \psi_{nk_n}) \tag{1.13}$$

が成り立つ．共役双線形形式の場合と同様に，共役 n 重線形形式の全体は，写像に対する自然な和とスカラー倍に関してベクトル空間になる．

注意 1-2　写像 $F : \mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ が，(1.12a) および (1.12b) の右辺で α^* を α で置き換えた式をみたすとき，F を $\mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_n$ 上の n **重線形形式**あるいは n **重線形汎関数**という．

例 1-3　ベクトル空間 $\mathscr{V}_j$ ($j = 1, \cdots, n$) が有限次元で $\dim \mathscr{V}_j = N_j$ の場合を考えよう．$\{e_i^{(j)}\}_{i=1}^{N_j}$ を $\mathscr{V}_j$ の基底とする．したがって，任意の $v_j \in \mathscr{V}_j$ は $v_j = \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_i(v_j)e_i^{(j)}$ と一意に表される．ただし，$\alpha_i(v_j) \in \mathbb{C}$ は v_j から一意に決まる定数である．$A = \{A_{i_1\cdots i_n}\}_{i_1=1,\cdots,N_1,\cdots,i_n=1,\cdots,N_n}$ を n 重有限複素数列とする．これに対して，写像 $F_A : \mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$F_A(v_1, \cdots, v_n) := \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} A_{i_1\cdots i_n}\alpha_{i_1}(v_j)^* \cdots \alpha_{i_n}(v_n)^*$$

によって定義する．このとき，F_A は $\mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_n$ 上の共役 n 重線形形式である．

例 1-1 と同様の考え方によって，

$$F_A^{(1)}(v_1, \cdots, v_n) := \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} A_{i_1\cdots i_n}\alpha_{i_1}(v_j) \cdots \alpha_{i_n}(v_n)$$

を定義すると，$F_A^{(1)}$ は $\mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_n$ 上の n 重線形形式である．

例 1-4　例 1-2 の拡張として，任意の $K \in \mathscr{L}^1((\mathbb{R}^d)^n)$ に対して，

$$F_K(f_1, \cdots, f_n) := \int_{(\mathbb{R}^d)^n} K(x_1, \cdots, x_n)f_1(x_1)^* \cdots f_n(x_n)^*\, dx_1 \cdots dx_n,$$
$$f_j \in C_0(\mathbb{R}^d),$$

によって，写像 $F_K : C_0(\mathbb{R}^d)^n \longrightarrow \mathbb{C}$ が定義される．これは共役 n 重線形である．また，

$$F_K^{(1)}(f_1,\cdots,f_n) := \int_{(\mathbb{R}^d)^n} K(x_1,\cdots,x_n)f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\,dx_1\cdots dx_n,$$

$$f_j \in C_0(\mathbb{R}^d),$$

によって定義される写像 $F_K^{(1)} : C_0(\mathbb{R}^d)^n \longrightarrow \mathbb{C}$ は n 重線形である.

$\mathscr{H}_1,\cdots,\mathscr{H}_n$ をヒルベルト空間としよう. 各 $\Psi_j \in \mathscr{H}_j$ に対して, $\mathscr{H}_1\times\cdots\times\mathscr{H}_n$ 上の共役 n 重線形形式 $\Psi_1\otimes\Psi_2\otimes\cdots\otimes\Psi_n$ — これを $\bigotimes_{j=1}^n \Psi_j$ とも書く — を

$$(\Psi_1\otimes\Psi_2\otimes\cdots\otimes\Psi_n)(\phi_1,\cdots,\phi_n) := \langle\phi_1,\Psi_1\rangle_{\mathscr{H}_1}\cdots\langle\phi_n,\Psi_n\rangle_{\mathscr{H}_n},$$

$$\phi_j \in \mathscr{H}_j,\ j=1,\cdots,n, \tag{1.14}$$

によって定義する. $\Psi_1\otimes\Psi_2\otimes\cdots\otimes\Psi_n$ ($\Psi_j\in\mathscr{H}_j$, $j=1,\cdots,n$) の 1 次結合の全体を $\mathscr{H}_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\mathscr{H}_n$ とし, これを $\mathscr{H}_1,\cdots,\mathscr{H}_n$ の**代数的テンソル積**という. $n=2$ の場合と同様に, この空間に

$$\langle\Psi_1\otimes\cdots\otimes\Psi_n, \Phi_1\otimes\cdots\otimes\Phi_n\rangle := \langle\Psi_1,\Phi_1\rangle\cdots\langle\Psi_n,\Phi_n\rangle \tag{1.15}$$

によって内積が定義される. この内積に関して, $\mathscr{H}_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\mathscr{H}_n$ を完備化して得られるヒルベルト空間を $\mathscr{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{H}_n$ あるいは $\bigotimes_{j=1}^n\mathscr{H}_j$ と書き, $\mathscr{H}_1,\cdots,\mathscr{H}_n$ の**テンソル積ヒルベルト空間**または単に**テンソル積**とよぶ.

特に, $\mathscr{H}_1=\cdots=\mathscr{H}_n=\mathscr{H}$ のとき, $\bigotimes_{j=1}^n\mathscr{H}_j = \bigotimes^n\mathscr{H}$ のように書き, これを $\mathscr{H}$ の n **重テンソル積** (n-fold tensor product) という.

注意 1-3 "詩的に" 表現するならば, ヒルベルト空間のテンソル積というのは, ヒルベルト空間たちが乗法的に結合して新たなヒルベルト空間を創る原理的理念の 1 つである. テンソル積を生み出す過程は無限に続けられる. こうして, この原理を通して, ヒルベルト空間たちは自ら無限の創造に与る.

2 個のヒルベルト空間の場合と同様に, $\mathscr{H}_j$ の部分空間 $\mathscr{D}_j$ に対して, それらの代数的テンソル積 $\hat{\bigotimes}_{j=1}^n\mathscr{D}_j = \mathscr{D}_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\mathscr{D}_n$ を

$$\hat{\bigotimes}_{j=1}^n\mathscr{D}_j := \mathscr{L}\left(\{\Psi_1\otimes\cdots\otimes\Psi_n \,|\, \Psi_j\in\mathscr{D}_j,\ j=1,\cdots,n\}\right) \tag{1.16}$$

によって定義する. 命題 1-3 の証明と全く同様にして, 次の事実が証明される (問題 5).

命題 1-4

(i)　$\mathscr{D}_j$ が $\mathscr{H}_j$ の稠密な部分空間ならば，$\hat{\bigotimes}_{j=1}^{n} \mathscr{D}_j$ は $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{H}_j$ で稠密である．

(ii)　$\{\Psi_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^{M_j}$ $(j = 1, \cdots, n,\ M_j \leq \infty)$ が $\mathscr{H}_j$ の CONS ならば，$\{\Psi_{k_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \Psi_{k_n}^{(n)} \mid k_j = 1, \cdots, M_j,\ j = 1, \cdots, n\}$ は $\mathscr{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_n$ の CONS である．

ヒルベルト空間論の初歩で学ぶように，ヒルベルト空間に関して同型という概念がある：2 つのヒルベルト空間 $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ について，$\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ へのユニタリ変換 (作用素) が存在するとき，$\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ は同型であるというのであった．この場合のユニタリ変換を $\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ との (1 つの) 同型対応とよび，これによって，$\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ を同一視することが可能となる[7]．

注意 1-4　2 つのヒルベルト空間の同型をあたえる対応は 1 つとは限らないことに注意．したがって，2 つのヒルベルト空間の同型について語る場合，それらがいかなる意味で — つまり，どういうユニタリ変換のもとで — 同型なのかをつねに明晰に意識する必要がある．

よく知られているように，任意の可分な無限次元ヒルベルト空間は，絶対 2 乗総和可能な数列が形成するヒルベルト空間 $l^2 := \left\{ a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$ と同型である[8]．だが，この同型は必ずしも有用であるとは限らない．純理論的にも応用上も，考える問題に応じて，適切な同型を見いだすことが重要である．これは，解析の対象となる作用素の形とも深く関わる．

ヒルベルト空間の同型とは，ヒルベルト空間が “変容する” 様を記述する概念である．この変容の仕方は，具象的なレヴェルから抽象的なレヴェルにわたって，さまざまでありうる．また，ヒルベルト空間の変容にはヒルベルト空間で働く作用素たちの変容も伴うことを忘れてはならない．ヒルベルト空間とそこで働く作用素たちは不可分の全体をなしている．

ヒルベルト空間の同型を確立する上で基本となるのは次の補題である[9]．

補題 1-5　$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ を可分なヒルベルト空間とし，$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ をそれぞれ，$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ の CONS とする．このとき，ユニタリ変換 $U : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{K}$ で $U\psi_n = \phi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ をみたすものがただ 1 つ存在する．

---

[7] より詳しくは，新井 (1997a) の 2.4 節を参照．

[8] 前掲書の定理 2.6 (ii)．

[9] 証明については，新井 (1997a) の定理 2.5 を参照．

$\mathfrak{S}_n$ を n 文字 $\{1,\cdots,n\}$ の置換全体からなる集合，すなわち，$\{1,\cdots,n\}$ 上の N 次の対称群とする．

命題 1-6 ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_j$ $(j=1,\cdots,n)$ は可分であるとする．$\sigma\in\mathfrak{S}_n$ を任意に固定する．このとき，ユニタリ作用素 $U_\sigma : \bigotimes_{j=1}^n \mathscr{H}_j \longrightarrow \bigotimes_{j=1}^n \mathscr{H}_{\sigma(j)}$ で，すべての $\Psi_j\in\mathscr{H}_j$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して，

$$U_\sigma(\Psi_1\otimes\cdots\otimes\Psi_n)=\Psi_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\Psi_{\sigma(n)},\quad \Psi_j\in\mathscr{H}_j,\ j=1,\cdots,n,$$

をみたすものがただ 1 つ存在する．

証明 $\{\Psi_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^\infty$ を $\mathscr{H}_j$ の CONS とする ($\dim\mathscr{H}_j=\infty$ $(j=1,\cdots,n)$ の場合についてだけ証明する；他の場合も同様)．命題 1-4 (ii) によって，ベクトルの集合

$$\{\Psi_{1,k_1;\cdots;n,k_n}:=\Psi_{k_1}^{(1)}\otimes\cdots\Psi_{k_n}^{(n)}\,|\,k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{N}\}$$

は $\bigotimes_{j=1}^n \mathscr{H}_j$ の CONS である．同様に，$\{\Psi_{\sigma(1),k_{\sigma(1)};\cdots;\sigma(n),k_{\sigma(n)}}\,|\,k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{N}\}$ は $\bigotimes_{j=1}^n \mathscr{H}_{\sigma(j)}$ の CONS である．したがって，補題 1-5 により，

$$U_\sigma\Psi_{1,k_1;\cdots;n,k_n}=\Psi_{\sigma(1),k_{\sigma(1)};\cdots;\sigma(n),k_{\sigma(n)}}$$

をみたすユニタリ作用素 $U_\sigma : \bigotimes_{j=1}^n \mathscr{H}_j \longrightarrow \bigotimes_{j=1}^n \mathscr{H}_{\sigma(j)}$ がただ 1 つ存在する．任意の $\Psi_j\in\mathscr{H}_j$ に対して，$\Psi:=\bigotimes_{j=1}^n \Psi_j$ とおけば，

$$\Psi=\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^\infty a_{1,k_1;\cdots;n,k_n}\Psi_{1,k_1;\cdots;n,k_n}$$

と展開できる．ただし，$a_{1,k_1;\cdots;n,k_n}:=\langle\Psi_{1,k_1;\cdots;n,k_n},\Psi\rangle=\prod_{j=1}^n\langle\Psi_{k_j}^{(j)},\Psi_j\rangle$．したがって，$U_\sigma$ の連続性により，

$$\begin{aligned}U_\sigma\Psi&=\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^\infty a_{1,k_1;\cdots;n,k_n}U_\sigma\Psi_{1,k_1;\cdots;n,k_n}\\&=\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^\infty a_{1,k_1;\cdots;n,k_n}\Psi_{\sigma(1),k_{\sigma(1)};\cdots;\sigma(n),k_{\sigma(n)}}.\end{aligned}$$

一方，$a_{1,k_1;\cdots;n,k_n}$ の形から，

$$a_{1,k_1;\cdots;n,k_n}=\langle\Psi_{\sigma(1),k_{\sigma(1)};\cdots;\sigma(n),k_{\sigma(n)}},\Psi_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\Psi_{\sigma(n)}\rangle.$$

したがって，

$$U_\sigma \Psi = \Psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \Psi_{\sigma(n)}.$$

よって，U_σ は題意の特性をもつ．　□

命題 1-6 は，$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{H}_j$ と $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{H}_{\sigma(j)}$ がユニタリ作用素 U_σ を通して同型であることを示している．この同型の意味で，

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{H}_j \cong \bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{H}_{\sigma(j)}$$

と記す．

1-2 節　L^2 空間のテンソル積

(X, Σ, μ) を測度空間とする．すなわち，X は空でない集合，Σ は X の部分集合からなる，1 つのボレル集合体 (σ 加法族)，μ は可測空間 (X, Σ) 上の測度である[10)]．以下，混乱のおそれがない場合には，ボレル集合体 Σ を記すのを省略して，しばしば，(X, Σ, μ) を単に (X, μ) と書く．また，X 上の Σ-可測関数を単に可測関数という．

X 上の可測関数 ψ で $\int_X |\psi(x)|^2 \, d\mu(x) < \infty$ をみたすものからつくられるヒルベルト空間を $L^2(X, d\mu)$ と記す．この空間の内積は

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L^2(X,d\mu)} := \int_X \psi(x)^* \phi(x) \, d\mu(x)$$

である．なお，$L^2(X, d\mu)$ の元の間の相等の概念は，

$$\psi = \phi \ \left(\psi, \phi \in L^2(X, d\mu)\right) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \psi(x) = \phi(x) \ \mu\text{-a.e.}x$$

によって定義されていることに注意[11)]．

(X_j, μ_j) $(j = 1, \cdots, n)$ を n 個の σ-有限な測度空間 $(n \geq 2)$ とする[12)]．このとき，1-1 節の結果により，テンソル積 $\bigotimes_{j=1}^{n} L^2(X_j, d\mu_j)$ が考えられる．これは抽象的に定義

[10)] 測度空間論およびルベーグ積分論については，伊藤 (1963)，テンプル (1981) 等を参照．応用上重要な諸定理が新井 (1997a) の付録 A にまとめてある．

[11)] 「$A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B$」は A を B によって定義する記法である．「μ-a.e.」は「測度 μ についてほとんどいたるところ (almost everywhere)」という意味．詳しくは，新井 (1997a) の 1 章，例 1.16 を参照．

[12)] 測度空間 (X, Σ, μ) が **σ-有限**であるとは，$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$，$\mu(B_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ をみたす $B_n \in \Sigma$ が存在する場合をいう．

されたヒルベルト空間である．このヒルベルト空間をより具体的なヒルベルト空間と同一視できれば都合がよい．実際，これが可能であることを以下で証明する．

各 $j = 1, \cdots, n$ に対して，X_j 上の可測関数 ψ_j があたえられたとき，直積集合 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 上の可測関数 $\psi_1 \times \cdots \times \psi_n$ を

$$(\psi_1 \times \cdots \times \psi_n)(x_1, \cdots, x_n) := \psi_1(x_1) \cdots \psi_n(x_n), \quad x_j \in X_j,\ j = 1, \cdots, n, \tag{1.17}$$

によって定義する．$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ を $\mu_1, \cdots, \mu_n$ の直積測度とし，直積測度空間 $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ 上の L^2 空間を $L^2(X_1 \times \cdots \times X_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n)$ と記す．

定理 1-7　各 $j = 1, \cdots, n$ に対して，$L^2(X_j, d\mu_j)$ は可分であるとする．このとき，テンソル積 $\bigotimes_{j=1}^{n} L^2(X_j, d\mu_j)$ から $L^2(X_1 \times \cdots \times X_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n)$ へのユニタリ変換 U で，

$$U(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) = \psi_1 \times \cdots \times \psi_n, \quad \psi_j \in L^2(X_j, d\mu_j), j = 1, \cdots, n, \tag{1.18}$$

をみたすものがただ 1 つ存在する．

この定理を証明するために，次の補題に注目する．

補題 1-8　(X_j, μ_j) $(j = 1, \cdots, n)$ を測度空間とする $(n \geq 2)$．各 $L^2(X_j, d\mu_j)$ は可分であるとし，$\{\psi_m^{(j)}\}_{m=1}^{M_j}$ を $L^2(X_j, d\mu_j)$ の CONS とする $(M_j \leq \infty)$．ヒルベルト空間 $L^2(X_1 \times \cdots \times X_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n)$ の元 $\Omega_{m_1, \cdots, m_n}$ を

$$\Omega_{m_1, \cdots, m_n} := \psi_{m_1} \times \cdots \times \psi_{m_n}$$

によって定義する．このとき，$\{\Omega_{m_1, \cdots, m_n}\}_{1 \leq m_j \leq M_j; j=1, \cdots, n}$ は $L^2(X_1 \times \cdots \times X_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n)$ の CONS である．

証明　$n = 2$, $M_1 = M_2 = \infty$ の場合だけを証明する (他の場合も同様)．$\psi_m := \psi_m^{(1)}$, $\phi_m := \psi_m^{(2)}$ とおく．$\{\Omega_{m,n}\}_{m,n}$ の正規直交性は容易に確かめられる．その完全性を示すために，$f \in L^2(X_1 \times X_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ がすべての m, n に対して

$$\langle f, \Omega_{m,n} \rangle = \int_{X_1 \times X_2} f(x, y)^* \Omega_{m,n}(x, y)\, d\mu_1 \otimes d\mu_2(x, y) = 0$$

をみたすとしよう．このとき，

$$f(x, y) = 0,\ \mu_1 \otimes \mu_2\text{-a.e.}(x, y) \tag{$*$}$$

を示せばよい．シュヴァルツの不等式により，$|f(x,y)|\,|\psi_m(x)|\,|\phi_n(y)|$ は可積分であるから，フビニの定理により，上の式は

$$\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)^*\psi_m(x)\,d\mu_1(x)\right)\phi_n(y)\,d\mu_2(y)=0$$

と書き直せる．$\{\phi_n\}_n$ の完全性により，各 m に対して，$\mu_2(S_m)=0$ をみたす集合 $S_m\subset X_2$ があって，$y\in X_2\setminus S_m$ ならば

$$\int_{X_1} f(x,y)^*\psi_m(x)\,d\mu_1(x)=0 \tag{$**$}$$

となる．したがって，$S=\bigcup_{m=1}^{\infty}S_m$ とすれば，$\mu_2(S)=0$ であって，任意の $y\in X_2\setminus S$ とすべての m に対して $(**)$ が成立する．そこで，今度は，$\{\psi_m\}_m$ の完全性を用いれば，各 $y\in X_2\setminus S$ に対して，可測集合 $S_y\in X_1$ で，$\mu_1(S_y)=0$ かつ $f(x,y)=0$ $(x\in X_1\setminus S_y)$ をみたすものがある．したがって，$\displaystyle\int_{X_1}|f(x,y)|^2\,d\mu_1(x)=0$ $(y\in X_2\setminus S)$．これは，$\displaystyle\int_{X_2}\left(\int_{X_1}|f(x,y)|^2\,d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)=0$ を導く．したがって，フビニの定理により，$\displaystyle\int_{X_1\times X_2}|f(x,y)|^2\,d\mu_1\otimes d\mu_2(x,y)=0$．ゆえに，$(*)$ を得る．□

定理 1-7 の証明　$n=2$ かつ $L^2(X_1,d\mu_1)$, $L^2(X_2,d\mu_2)$ が無限次元の場合だけを証明する．他の場合も同様である．$(X_j,d\mu_j)$, ψ_n, ϕ_n, $\Omega_{m,n}$ を補題 1-8 のものとしよう．命題 1-3，補題 1-8，補題 1-5 により，$L^2(X_1,d\mu_1)\otimes L^2(X_2,d\mu_2)$ から $L^2(X_1\times X_2,d\mu_1\otimes d\mu_2)$ へのユニタリ変換 U で $U\psi_m\otimes\phi_n=\Omega_{m,n}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ をみたすものがただ 1 つ存在する．$\psi\in L^2(X_1,d\mu_1)$, $\phi\in L^2(X_2,d\mu_2)$ に対して，$\psi=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\psi_m$, $\phi=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\phi_n$ と展開すれば $(a_m=\langle\psi_m,\psi\rangle$, $b_n=\langle\phi_n,\phi\rangle)$,

$$\psi\otimes\phi=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_mb_n\psi_m\otimes\phi_n.$$

したがって，U の連続性により，

$$U(\psi\otimes\phi)=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_mb_n\Omega_{m,n}=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_mb_n\psi_m\times\phi_n=\psi\times\phi.$$

ゆえに，求める結果を得る．□

定理 1-7 は，$\bigotimes_{j=1}^{n}L^2(X_j,d\mu_j)$ と $L^2(X_1\times\cdots\times X_n,d\mu_1\otimes\cdots\otimes d\mu_n)$ が，(1.18) をみたすユニタリ変換 U のもとで，同型であるとことを示している．この同型対応

は，純テンソル $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n$ を変数分離の積 $\psi_1 \times \cdots \times \psi_n$ に対応させるという意味で“自然な”ものである．そこで，いまの同型を $\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} L^2(X_j, d\mu_j)$ と $L^2(X_1 \times \cdots \times X_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n)$ との間の**自然な同型**という．この同型の意味で，

$$\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} L^2(X_j, d\mu_j) \cong L^2(X_1 \times \cdots \times X_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n) \tag{1.19}$$

と記す[13]．

例 1-5 $d \in \mathbb{N}$ とし，$X_j = \mathbb{R}^d$, $d\mu_j = dx$ (d 次元ルベーグ測度) $(j = 1, \cdots, n)$ とすれば，

$$\overset{n}{\otimes} L^2(\mathbb{R}^d) \cong L^2(\mathbb{R}^{dn}).$$

1-3 節　ヒルベルト空間値の L^2 関数の空間とテンソル積

(X, Σ, μ) を測度空間，$\mathscr{H}$ を可分なヒルベルト空間，$F : X \longrightarrow \mathscr{H}$ を X 上の $\mathscr{H}$-値関数とする (すなわち，F は各 $x \in X$ に対して，$\mathscr{H}$ の元 $F(x)$ を 1 つ対応させる写像)．もし，すべての $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，$\mathbb{C}$-値関数 : $x \longrightarrow \langle \Psi, F(x) \rangle_{\mathscr{H}}$ $(x \in X)$ が Σ-可測であるならば，F は **Σ-可測**あるいは単に可測であるという．このような関数の全体を $M(X; \mathscr{H})$ で表す．

補題 1-9 任意の $F, G \in M(X; \mathscr{H})$ に対して，X 上の関数 : $x \longrightarrow \langle F(x), G(x) \rangle_{\mathscr{H}}$ は Σ-可測である．特に，関数 : $x \longrightarrow \|F(x)\|^2_{\mathscr{H}}$ は Σ-可測である．

証明 $\mathscr{H}$ は可分であるから，CONS が存在する．その 1 つを $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ としよう (ここでは，$\dim \mathscr{H} = \infty$ の場合のみを考える : $\dim \mathscr{H} < \infty$ の場合は，もっと容易)．このとき，$\langle F(x), G(x) \rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n=1}^\infty \langle F(x), \Phi_n \rangle_{\mathscr{H}} \langle \Phi_n, G(x) \rangle_{\mathscr{H}}$. 仮定により，$\langle F(x), \Phi_n \rangle_{\mathscr{H}} \langle \Phi_n, G(x) \rangle_{\mathscr{H}}$ は Σ-可測であるから，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\sum_{n=1}^N \langle F(x), \Phi_n \rangle_{\mathscr{H}} \langle \Phi_n, G(x) \rangle_{\mathscr{H}}$ も Σ-可測である．したがって，その各点収束の極限 $(N \longrightarrow \infty)$ である $\langle F(x), G(x) \rangle_{\mathscr{H}}$ も Σ-可測である．$F = G$ の場合を考えると，関数 : $x \longrightarrow \|F(x)\|^2_{\mathscr{H}}$ も Σ-可測である． □

---

13) 単に $\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} L^2(X_j, d\mu_j) = L^2(X_1 \times \cdots \times X_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n)$ と書く場合もある．

補題 1-9 によって，

$$L^2(X, d\mu; \mathscr{H}) := \left\{ F \in M(X; \mathscr{H}) \;\middle|\; \int_X \|F(x)\|_{\mathscr{H}}^2 \, d\mu(x) < \infty \right\} \tag{1.20}$$

が定義される．ただし，通常の L^2 空間の場合のように，$F = G \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F(x) = G(x)$, μ-a.e.x によって元の間の相等を定義する．任意の $F, G \in L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ に対して，シュヴァルツの不等式によって，

$$\begin{aligned}\int_X |\langle F(x), G(x)\rangle_{\mathscr{H}}| \, d\mu(x) &\le \int_X \|F(x)\|_{\mathscr{H}} \|G(x)\|_{\mathscr{H}} \, d\mu(x) \\ &\le \left(\int_X \|F(x)\|_{\mathscr{H}}^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} \left(\int_X \|G(x)\|_{\mathscr{H}}^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2} \\ &< \infty\end{aligned}$$

であるから，

$$\langle F, G\rangle_{L^2(X, d\mu; \mathscr{H})} := \int_X \langle F(x), G(x)\rangle_{\mathscr{H}} \, d\mu(x) \tag{1.21}$$

が定義され，これは $L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ の内積になる．X 上の複素数値の絶対 2 乗可積分関数からつくられるヒルベルト空間 $L^2(X, d\mu)$ の場合と全く同様にして，$L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ は，この内積に関して，ヒルベルト空間になることが証明される (問題 6)．

X 上の任意の複素数値 Σ-可測関数 f と $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，積 $f \times \Psi \in M(X; \mathscr{H})$ を

$$(f \times \Psi)(x) := f(x)\Psi \tag{1.22}$$

によって定義する．

容易にわかるように，$f \in L^2(X, d\mu)$ ならば，$f \times \Psi \in L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ であり，

$$\langle f \times \Psi, g \times \Phi\rangle = \langle f, g\rangle_{L^2(X, d\mu)} \langle \Psi, \Phi\rangle_{\mathscr{H}}, \quad g \in L^2(X, d\mu),\ \Phi \in \mathscr{H}. \tag{1.23}$$

命題 1-10　$\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathscr{H}$ の CONS とする．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i)　任意の $F \in L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \int_X \left\| F(x) - \sum_{n=1}^N \langle \Phi_n, F(x)\rangle_{\mathscr{H}} \Phi_n \right\|_{\mathscr{H}}^2 d\mu(x) = 0. \tag{1.24}$$

(ii)　任意の $F, G \in L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ に対して，

$$\langle F, G\rangle = \sum_{n=1}^\infty \int_X \langle F(x), \Phi_n\rangle_{\mathscr{H}} \langle \Phi_n, G(x)\rangle_{\mathscr{H}} \, d\mu(x). \tag{1.25}$$

証明　(i) a.e.$x \in X$ に対して，$f_N(x) := \left\| F(x) - \sum_{n=1}^{N} \langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathscr{H}} \Phi_n \right\|_{\mathscr{H}}^2 \longrightarrow 0 \ (N \longrightarrow \infty)$．一方，初等的不等式

$$|z+w|^2 \le 2(|z|^2 + |w|^2), \quad z, w \in \mathbb{C}, \tag{1.26}$$

とヒルベルト空間のノルムに関する三角不等式を用いると

$$\begin{aligned} |f_N(x)| &\le 2\| F(x) \|_{\mathscr{H}}^2 + 2\left\| \sum_{n=1}^{N} \langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathscr{H}} \Phi_n \right\|_{\mathscr{H}}^2 \\ &= 2\| F(x) \|_{\mathscr{H}}^2 + 2 \sum_{n=1}^{N} | \langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathscr{H}} |^2 \\ &\le 4\|F(x)\|^2. \end{aligned}$$

ここで，最後の不等号を得るのにベッセルの不等式を用いた．したがって，ルベーグの優収束定理を応用することにより，

$$\lim_{N\to\infty} \int_X f_N(x)\, d\mu(x) = \int_X \lim_{N\to\infty} f_N(x)\, d\mu(x) = 0.$$

ゆえに (1.24) を得る．

(ii) $F \in L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ に対して，$F_n(x) = \langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathscr{H}}$ とおくと，$F_n \in L^2(X, d\mu)$ であり，(i) の式は，

$$\lim_{N\to\infty} \left\| F - \sum_{n=1}^{N} F_n \times \Phi_n \right\|_{L^2(X,d\mu;\mathscr{H})} = 0$$

と書ける．G についても同様である．したがって，ノルムに関する内積の連続性と (1.23) により，

$$\begin{aligned} \langle F, G \rangle &= \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} F_n \times \Phi_n, \sum_{m=1}^{N} G_m \times \Phi_m \right\rangle_{L^2(X,d\mu;\mathscr{H})} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X F_n(x)^* G_n(x)\, d\mu(x). \end{aligned}$$

ゆえに (1.25) が得られる．　□

補題 1-11　$L^2(X, d\mu)$ は可分であるとし，$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ を $L^2(X, d\mu)$ の CONS の 1 つとする ($\dim L^2(X, d\mu) = \infty$ の場合を考える)．$\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ の CONS とする．このとき，$\{f_m \times \Phi_n\}_{m,n=1}^{\infty}$ は $L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ の CONS である．

証明　$\{f_m \times \Phi_n\}_{m,n=1}^{\infty}$ が正規直交系であることは，(1.23) によって容易にわかる．

完全性を示そう．そこで，すべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$\langle F, f_m \times \Phi_n \rangle = 0$ をみたす $F \in L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ があったとしよう．このとき，(1.25) で $G = f_m \times \Phi_n$ とすれば，$\langle \Phi_k, f_m(x)\Phi_n \rangle_{\mathscr{H}} = f_m(x)\delta_{kn}$ によって，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X \langle F(x), \Phi_k \rangle_{\mathscr{H}} f_m(x) \delta_{kn}\, d\mu(x) = 0,$$

すなわち，$\int_X \langle F(x), \Phi_n \rangle_{\mathscr{H}} f_m(x)\, d\mu(x) = 0$．これから，補題 1-9 の証明と同様にして，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\langle F(x), \Phi_n \rangle_{\mathscr{H}} = 0$，a.e.$x$ が導かれる．したがって，$F(x) = 0$, a.e.x．ゆえに，$L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ の元として，$F = 0$．よって，題意がしたがう．　□

注意 1-5　補題 1-11 によって，$L^2(X, d\mu)$ と $\mathscr{H}$ が可分ならば，$L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ も可分であることが示されたことになる．

定理 1-12　$L^2(X, d\mu)$ と $\mathscr{H}$ は可分であるとする．このとき，ユニタリ変換 $U : L^2(X, d\mu) \otimes \mathscr{H} \longrightarrow L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ で，任意の $f \in L^2(X, d\mu)$ と $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，$U(f \otimes \Psi) = f \times \Psi$ をみたすものがただ 1 つ存在する．

証明　$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$，$\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を補題 1-11 のものとする．補題 1-11，命題 1-3 (ii)，補題 1-5 によって，ユニタリ変換 $U : L^2(X, d\mu) \otimes \mathscr{H} \longrightarrow L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ で，すべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $U(f_m \otimes \Phi_n) = f_m \times \Phi_n$ をみたすものがただ 1 つ存在する．任意の $f \in L^2(X, d\mu)$ と $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\begin{aligned} f \otimes \Psi &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle f_m \otimes \Phi_n, f \otimes \Psi \rangle f_m \otimes \Phi_n \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle f_m, f \rangle_{L^2(X,d\mu)} \langle \Phi_n, \Psi \rangle_{\mathscr{H}} f_m \otimes \Phi_n \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle f_m \times \Phi_n, f \times \Psi \rangle f_m \otimes \Phi_n \end{aligned}$$

であるから，U の連続性により，

$$\begin{aligned} U(f \otimes \Psi) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle f_m \times \Phi_n, f \times \Psi \rangle U(f_m \otimes \Phi_n) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle f_m \times \Phi_n, f \times \Psi \rangle f_m \times \Phi_n \\ &= f \times \Psi. \end{aligned}$$

したがって，U は求める特性をもつ． □

定理 1-12 のユニタリ変換 U は，$L^2(X, d\mu) \otimes \mathscr{H}$ と $L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ の間の 1 つの同型対応をあたえる．この同型対応を $L^2(X, d\mu) \otimes \mathscr{H}$ と $L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ **の間の自然な同型対応**という．この同型の意味で，

$$L^2(X, d\mu) \otimes \mathscr{H} \cong L^2(X, d\mu; \mathscr{H}) \tag{1.27a}$$

と記す．したがって，命題 1-6 によって，

$$L^2(X, d\mu; \mathscr{H}) \cong \mathscr{H} \otimes L^2(X, d\mu) \tag{1.27b}$$

でもある．

例 1-6 $\mathbb{C}^r := \{(z_1, \cdots, z_r) \mid z_j \in \mathbb{C}, j = 1, \cdots, r\}$ を r 次元ユニタリ空間とするとき，

$$L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^r \cong L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^r) \cong \mathbb{C}^r \otimes L^2(\mathbb{R}^d).$$

定理 1-12 の事実はもっと一般化されうる．$\mathscr{H}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ を可分なヒルベルト空間，(X_j, Σ_j, μ_j) $(j = 1, \cdots, n)$ を測度空間で，各 $L^2(X_j, d\mu_j)$ が可分となるものとしよう．このとき，$\bigotimes_{j=1}^n [L^2(X_j, d\mu_j) \otimes \mathscr{H}_j]$ から，$\left[\bigotimes_{j=1}^n L^2(X, d\mu_j)\right] \otimes \left[\bigotimes_{j=1}^n \mathscr{H}_j\right]$ へのユニタリ変換 V で

$$V\left(\bigotimes_{j=1}^n [f_j \otimes \Psi_j]\right) = \left[\bigotimes_{j=1}^n f_j\right] \otimes \left[\bigotimes_{j=1}^n \Psi_j\right],$$

$$f_j \in L^2(X_j, d\mu_j),\ \Psi_j \in \mathscr{H}_j,\ j = 1, \cdots, n,$$

をみたすものがただ 1 つ存在する．証明の考え方は定理 1-12 の場合と同様であるから，その詳細を埋めることは読者の演習とする．ユニタリ変換 V による $\bigotimes_{j=1}^n [L^2(X_j, d\mu_j) \otimes \mathscr{H}_j]$ と $\left[\bigotimes_{j=1}^n L^2(X, d\mu_j)\right] \otimes \left[\bigotimes_{j=1}^n \mathscr{H}_j\right]$ との同型を，これらのヒルベルト空間の間の**自然な同型**という．この同型の意味で，

$$\bigotimes_{j=1}^n [L^2(X_j, d\mu_j) \otimes \mathscr{H}_j] \cong \left[\bigotimes_{j=1}^n L^2(X, d\mu_j)\right] \otimes \left[\bigotimes_{j=1}^n \mathscr{H}_j\right] \tag{1.28}$$

と記す．

定理 1-7 から，$\bigotimes_{j=1}^n L^2(X, d\mu_j) \cong L^2(X_1 \times \cdots \times X_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n)$ であるから，(1.27a) を応用することにより，上述の自然な同型対応の意味で，

$$\bigotimes_{j=1}^{n}[L^2(X_j,d\mu_j)\otimes\mathscr{H}_j]\cong\left[\bigotimes_{j=1}^{n}L^2(X_j,d\mu_j)\right]\otimes\left[\bigotimes_{j=1}^{n}\mathscr{H}_j\right]$$
$$\cong L^2\left(X_1\times\cdots\times X_n,d\mu_1\otimes\cdots\otimes d\mu_n;\bigotimes_{j=1}^{n}\mathscr{H}_j\right) \tag{1.29}$$

が成立することになる．念のために言えば，最後の同型対応は

$$\bigotimes_{j=1}^{n}(f_j\otimes\Psi_j)\longrightarrow(f_1\times\cdots\times f_n)\times\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\Psi_j\right)$$

によってあたえられる $(f_j\in L^2(X_j,d\mu_j),\Psi_j\in\mathscr{H}_j)$.

例 1-7　d, N, $r\in\mathbb{N}$ とする．(1.29) によって，

$$\overset{N}{\otimes}L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)\cong\overset{N}{\otimes}[L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathbb{C}^r]\cong L^2\left(\mathbb{R}^{dN};\overset{N}{\otimes}\mathbb{C}^r\right).$$

1-4 節　置換作用素，対称テンソル積，反対称テンソル積

量子力学において，同種の素粒子からなる系は素粒子の交換に対してある種の対称性を有する[14)]．この節では，この対称性を定式化するための数学的概念を論じる．

ものの交換あるいは置き換えの操作は数学的には置換の概念によって表現される．$\mathscr{H}$ を可分なヒルベルト空間とする．命題 1-6 によって，$\overset{N}{\otimes}\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 U_σ で任意の $\Psi_j\in\mathscr{H}$ $(j=1,\cdots,N)$ に対して，

$$U_\sigma(\Psi_1\otimes\cdots\otimes\Psi_N)=\Psi_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\Psi_{\sigma(N)} \tag{1.30}$$

をみたすものがただ 1 つ存在する．作用素 U_σ を置換 σ に対する**置換作用素**という．

命題 1-13

(i)　任意の τ, $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ に対して，

$$U_\tau U_\sigma=U_{\sigma\tau} \tag{1.31}$$

が成り立つ．

(ii)　任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ に対して，

$$U_\sigma^*=U_\sigma^{-1}=U_{\sigma^{-1}}. \tag{1.32}$$

---

14) このことについては，4 章のはじめで少し詳しく説明する．

ここで，U_σ^* は U_σ の共役作用素を表す[15)]．

証明 (i) 任意の $\Psi_j \in \mathscr{H}$ $(j=1,\cdots,N)$ に対して，(1.30) により，

$$U_\tau U_\sigma(\Psi_1 \otimes \cdots \Psi_N) = U_\tau(\Psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \Psi_{\sigma(N)}) = \Psi_{\sigma(\tau(1))} \otimes \cdots \Psi_{\sigma(\tau(N))})$$
$$= U_{\sigma\tau}(\Psi_1 \otimes \cdots \Psi_N)$$

(第 2 の等号で，$\Psi_{\tau(\sigma(1))} \otimes \cdots \Psi_{\tau(\sigma(N))}$ としないように注意！ $\Psi_{\sigma(j)} = \Phi_j$ と置き換えて考えればわかりやすいであろう)．いま，使用した型のベクトル $\Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_N$ の生成する部分空間は稠密であるから，演算子の等式 (1.31) が得られる．

(ii) (1.32) の第 1 の等号は U_σ のユニタリ性による．(1.31) で，$\tau = \sigma^{-1}$ ととり，$\sigma\sigma^{-1} = I$, $U_I = I$ を使えば，

$$U_{\sigma^{-1}} U_\sigma = I.$$

これは，(1.32) の第 2 の等号を意味する．□

置換作用素の 1 次結合で重要なものとして，次の 2 つの作用素がある：

$$S_N := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} U_\sigma, \tag{1.33}$$

$$A_N := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) U_\sigma. \tag{1.34}$$

ここで，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号を表す (σ が偶置換ならば，$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$，σ が奇置換ならば，$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$)．作用素 S_N を N 次の**対称化作用素** (symmetrization operator)，A_N を N 次の**反対称化作用素** (anti-symmetrization operator) という (次の命題 1-14 の (iv), (v) を参照)．これらの作用素の基本的性質は次の命題にまとめられる．

命題 1-14

(i) 任意の $\tau \in \mathfrak{S}_N$ に対して，

$$U_\tau S_N = S_N U_\tau = S_N, \tag{1.35}$$

$$U_\tau A_N = A_N U_\tau = \mathrm{sgn}(\tau) A_N. \tag{1.36}$$

(ii) $S_N^2 = S_N$, $S_N^* = S_N$.

---

15) 一般に，稠密に定義された，ヒルベルト空間からヒルベルト空間への線形作用素 T に対して，その共役作用素を T^* で表す．共役作用素については，新井 (1997a) の 2.7 節を参照．

(iii)　$A_N^2 = A_N$, $A_N^* = A_N$.

(iv)　任意の $\psi_1, \cdots, \psi_N \in \mathscr{H}$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して,

$$S_N(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N) = S_N(\psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(N)}).$$

(v)　任意の $\psi_1, \cdots, \psi_N \in \mathscr{H}$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して,

$$A_N(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N) = \mathrm{sgn}(\sigma) A_N(\psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(N)}). \tag{1.37}$$

特に, $\psi_1, \cdots, \psi_N$ のうち少なくとも 2 つが同じならば, $A_N(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N) = 0$ である[16].

(vi)　$N \geq 2$ ならば, S_N の値域 $\mathrm{Ran}\,(S_N)$ と A_N の値域 $\mathrm{Ran}\,(A_N)$ は直交する[17].

証明　(i) 任意の $\tau \in \mathfrak{S}_N$ に対して, $\{\sigma\tau \,|\, \sigma \in \mathfrak{S}_N\} = \mathfrak{S}_N$ という事実と (1.32) によって,

$$U_\tau S_N = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} U_\tau U_\sigma = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} U_{\sigma\tau} = S_N.$$

したがって, (1.35) の第 1 の等号が成立する. 第 2 の等号についても同様.

(1.36) については, 置換の符号の性質

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau), \quad \tau, \sigma \in \mathfrak{S}_N, \tag{1.38}$$

に注意して, 上と同様の計算をすればよい.

(ii) (1.35) を使えば,

$$S_N^2 = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} S_N U_\sigma = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} S_N = \frac{1}{N!} N! S_N = S_N.$$

共役演算の線形性により, $S_N^* = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} U_\sigma^*/N!$. これと (1.30) および $\{\sigma^{-1} \,|\, \sigma \in \mathfrak{S}_N\} = \mathfrak{S}_N$ という事実によって, $S_N^* = S$ が得られる.

(iii) (ii) と同様.

(iv) (1.35) の単純な適用.

(v) (1.37) は (1.36) の単純な適用による. $\psi_i = \psi_j$ $(i \neq j)$ とし, $\Psi = A_N(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N)$ とおく. (1.37) において, $\sigma = (i, j)$ (i と j の互換) とすれば, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ であるから, $\Psi = -\Psi$ となる. したがって, $\Psi = 0$.

(vi) (1.36) を用いると,

---

[16] これは, 量子力学の文脈では, **パウリの排他原理**に対応する.

[17] 一般に, ヒルベルト空間からヒルベルト空間への線形作用素 T に対して, その**値域**を $\mathrm{Ran}\,(T)$ によって表す : $\mathrm{Ran}\,(T) := \{T\psi \,|\, \psi \in D(T)\}$ ($D(T)$ は T の**定義域**を表す).

$$A_N S_N = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} A_N U_\sigma = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) A_N.$$

$N \geq 2$ ならば，$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) = 0$ であるから，$A_N S_N = 0$ $(N \geq 2)$．これは，$\mathrm{Ran}\,(S_N)$ と $\mathrm{Ran}\,(A_N)$ の直交性を意味する． □

命題 1-14 (ii), (iii) は，S_N, A_N が正射影作用素であることを示している[18]．したがって，それらの値域 $\mathrm{Ran}\,(S_N)$, $\mathrm{Ran}\,(A_N)$ は $\overset{N}{\otimes}\mathscr{H}$ の閉部分空間として，ヒルベルト空間である．前者を $\mathscr{H}$ の N **重対称テンソル積** (N-fold symmetric tensor product)，後者を $\mathscr{H}$ の N **重反対称テンソル積** (N-fold anti-symmetric tensor product) とよび，記号的に

$$\overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H} := \mathrm{Ran}\,(S_N), \quad \overset{N}{\wedge}(\mathscr{H}) := \overset{N}{\underset{\mathrm{as}}{\otimes}}\mathscr{H} := \mathrm{Ran}\,(A_N) \tag{1.39}$$

と表す．

N 個のベクトル $\psi_1, \cdots, \psi_N \in \mathscr{H}$ に対して，それらの積を

$$\psi_1 \cdots \psi_N := S_N(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N) \tag{1.40}$$

によって定義する．命題 1-14 (iv) により，この積は可換である．$n_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対して，

$$\psi_1^{n_1} \cdots \psi_j^{n_j} \cdots \psi_N^{n_N} := \underbrace{\psi_1 \cdots \psi_1}_{n_1\text{個}} \cdots \underbrace{\psi_j \cdots \psi_j}_{n_j\text{個}} \cdots \underbrace{\psi_N \cdots \psi_N}_{n_N\text{個}} \in \overset{\sum_{j=1}^N n_j}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \tag{1.41}$$

とおく．

さらに，$\psi_1, \cdots, \psi_N$ の**外積** (exterior product) $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_N \in \overset{N}{\wedge}(\mathscr{H})$ を

$$\begin{aligned}\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_N &:= \sqrt{N!}\, A_N(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(N)}\end{aligned} \tag{1.42}$$

によって定義する[19]．

---

[18] ヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の線形作用素 P が**正射影作用素**であるとは，(i) P の定義域は $\mathscr{X}$ 全体であり，かつ P は有界，(ii) $P^* = P$ (自己共役性)，(iii) $P^2 = P$ (巾(べき)等性) が成立する場合をいう．新井 (1997a) の 3 章，3.1 節を参照．以下，正射影作用素のことを単に射影作用素という場合がある．

[19] 文献によっては，(1.42) の右辺を $\sqrt{N!}$ 倍したものを $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_N$ と定義する場合があるから，他の文献を読む場合は注意されたい．

$\overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ および $\overset{N}{\wedge}(\mathscr{H})$ の基底については，次の命題が成立する．

命題 1-15　$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ の CONS とする．

(i)　集合

$$\mathscr{E}_{\mathrm{s}}^{(N)} := \left\{ \sqrt{\frac{N!}{n_1!\cdots n_N!}} e_{i_1}^{n_1}\cdots e_{i_N}^{n_N} \,\middle|\, i_1 < \cdots < i_N, i_j \in \mathbb{N}, \right.$$
$$\left. n_j \in \{0\}\cup\mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{N} n_j = N \right\}$$

は $\overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ の CONS である．

(ii)　集合 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_N} \mid i_1 < \cdots < i_N, i_j \in \mathbb{N}\}$ は $\overset{N}{\wedge}(\mathscr{H})$ の CONS である．

証明　(i) 命題 1-14 (ii) を使うと，任意の ψ_j, $\phi_j \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\langle \psi_1\cdots\psi_N, \phi_1\cdots\phi_N\rangle = \langle \psi_1\otimes\cdots\otimes\psi_N, S_N(\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_N)\rangle$$
$$= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\langle\psi_1,\phi_{\sigma(1)}\rangle\cdots\langle\psi_N,\phi_{\sigma(N)}\rangle.$$

したがって，

$$\langle e_{j_1}\cdots e_{j_N}, e_{k_1}\cdots e_{k_N}\rangle = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\delta_{j_1k_{\sigma(1)}}\cdots\delta_{j_Nk_{\sigma(N)}}.$$

もし，$\{j_1,\cdots,j_N\} \neq \{k_1,\cdots,k_N\}$ (集合として等しくないという意味) ならば，すべての $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ に対して，$\{j_1,\cdots,j_N\} \neq \{k_{\sigma(1)},\cdots,k_{\sigma(N)}\}$．したがって，上式の右辺は 0．これは，$\{e_{j_1}\cdots e_{j_N} \mid j_1 \le \cdots \le j_N,\ j_i \in \mathbb{N}\}$ が直交系であることを意味する．上の計算で $j_i = k_i$ $(i = 1,\cdots,N)$ とし，$i_1 = j_1 = \cdots = j_{n_1}$, $i_2 = j_{n_1+1} = \cdots = j_{n_1+n_2},\cdots, i_N = j_{n_1+\cdots+n_{N-1}+1} = \cdots = j_N$ ($i_1 < \cdots < i_N$) とすれば，

$$\| e_{i_1}^{n_1}\cdots e_{i_N}^{n_N}\|^2 = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\delta_{j_1j_{\sigma(1)}}\cdots\delta_{j_Nj_{\sigma(N)}} = \frac{n_1!\cdots n_N!}{N!}.$$

よって，$\mathscr{E}_{\mathrm{s}}^{(N)}$ は $\overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ の正規直交系である．完全性を示すために，$\Psi \in (\mathscr{E}_{\mathrm{s}}^{(N)})^{\perp}$, $\Psi \in \overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ としよう[20]．したがって，任意の $j_1,\cdots,j_N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$0 = \langle\Psi, e_{j_1}\cdots e_{j_N}\rangle = \langle S_N\Psi, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_N}\rangle = \langle\Psi, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_N}\rangle.$$

---

[20] ヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ の部分集合 $\mathscr{D}$ に対して，$\mathscr{D}^{\perp}$ は $\mathscr{D}$ の直交補空間を表す： $\mathscr{D}^{\perp} := \{\phi \in \mathscr{K} \mid \langle\phi,\psi\rangle_{\mathscr{K}} = 0,\ \psi\in\mathscr{D}\}$.

ここで，最後の等式を得るのに $S_N\Psi = \Psi$ ($\because \Psi \in \mathrm{Ran}\,(S_N)$ で S_N は正射影作用素) を用いた．$\{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_N} \,|\, j_1, \cdots, j_N \in \mathbb{N}\}$ は $\overset{N}{\otimes}\mathscr{H}$ の CONS であるから，上の式より，$\Psi = 0$ でなければならない．したがって，$(\mathscr{E}_{\mathrm{s}}^{(N)})^{\perp} = \{0\}$．ゆえに，正規直交系 $\mathscr{E}_{\mathrm{s}}^{(N)}$ は完全である．

(ii) 命題 1-14 (iii) を使うと，任意の $\psi_j, \phi_j \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\langle \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_N, \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_N \rangle = N! \langle \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N, A_N(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N)\rangle$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \langle \psi_1, \phi_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle \psi_N, \phi_{\sigma(N)} \rangle.$$

すなわち，

$$\langle \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_N, \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_N \rangle = \begin{vmatrix} \langle \psi_1, \phi_1 \rangle & \langle \psi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \psi_1, \phi_N \rangle \\ \langle \psi_2, \phi_1 \rangle & \langle \psi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \psi_2, \phi_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_N, \phi_1 \rangle & \langle \psi_N, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \psi_N, \phi_N \rangle \end{vmatrix}. \quad (1.43)$$

ただし，N 次行列 $M = (M_{ij})$ $(i, j = 1, \cdots, N)$ に対して，$|M|$ は M の行列式を表す (つまり，上式の右辺は，(i, j) 成分が $\langle \psi_i, \phi_j \rangle$ の行列 $(\langle \psi_i, \phi_j \rangle)_{i,j=1,\cdots,N}$ に対する行列式)．これと命題 1-14 (v) を使うと，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_N} \,|\, i_1 < \cdots < i_N, i_j \in \mathbb{N}\}$ は $\overset{N}{\wedge}(\mathscr{H})$ の正規直交系であることがわかる．完全性の証明は (i) の場合と同様． □

注意 1-6 $\mathscr{H}$ が有限次元のとき，$d := \dim \mathscr{H} < \infty$ とすれば，

$$\left\{ \sqrt{\frac{N!}{n_1! \cdots n_N!}} e_{i_1}^{n_1} \cdots e_{i_N}^{n_N} \;\middle|\; 1 \le i_1 < \cdots < i_N \le d, n_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{N} n_j = N \right\}$$

が $\overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ の CONS であり，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_N} \,|\, 1 \le i_1 < \cdots < i_N \le d\}$ が $\overset{N}{\wedge}(\mathscr{H})$ の CONS である．特に，$\overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ および $\overset{N}{\wedge}(\mathscr{H})$ は有限次元であり，

$$\dim \overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} = {}_{d+N-1}C_N, \quad \dim \overset{N}{\wedge}(\mathscr{H}) = \begin{cases} {}_dC_N & (1 \le N \le d) \\ 0 & (N > d) \end{cases}$$

である[21]．ただし，

[21] たとえば，佐武 (1974) の pp. 216〜217 を参照．

$$
{}_nC_m := \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} := \frac{n!}{(n-m)!m!}, \quad m, n \in \mathbb{N}, n \geq m, \tag{1.44}
$$

は 2 項係数である.

例 1-8　$d, N \in \mathbb{N}$ とする. d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の N 個の直積 $\mathbb{R}^{dN}$ の点を $(x_1, \cdots, x_N)$ $(x_j \in \mathbb{R}^d,\ j = 1, \cdots, N)$ と表す. $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ の元で変数の任意の置換に関して対称なものから生成される部分空間

$$
\begin{aligned}
&L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dN}) \\
&:= \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^{dN}) \,|\, \psi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(N)}) = \psi(x_1, \cdots, x_N),\ \text{a.e.},\ \sigma \in \mathfrak{S}_N\}
\end{aligned}
$$

は閉である. また, $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ の元で変数の任意の置換に関して反対称なものから生成される部分空間

$$
\begin{aligned}
&L^2_{\mathrm{as}}(\mathbb{R}^{dN}) \\
&:= \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^{dN}) \,|\, \psi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(N)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\psi(x_1, \cdots, x_N),\ \text{a.e.},\ \sigma \in \mathfrak{S}_N\}
\end{aligned}
$$

も閉である.

例 1-5 の自然な同型対応 $\overset{N}{\otimes} L^2(\mathbb{R}^d) \cong L^2(\mathbb{R}^{dN})$ をあたえるユニタリ作用素を W とし, 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して, $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上の作用素 U'_σ を

$$
U'_\sigma := W U_\sigma W^{-1}
$$

によって定義する. U'_σ はユニタリである. 任意の $f_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対して, $W(f_1 \otimes \cdots \otimes f_N) = f_1 \times \cdots \times f_N$ であるから,

$$
U'_\sigma f_1 \times \cdots \times f_N = f_{\sigma(1)} \times \cdots \times f_{\sigma(N)}
$$

が成り立つ. これは, 任意の $\psi \in L^2(\mathbb{R}^{dN})$ に対して,

$$
(U'_\sigma \psi)(x_1, \cdots, x_N) = \psi(x_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, x_{\sigma^{-1}(N)}), \quad \text{a.e.}
$$

を導く (定理 1-7 の証明のように, ψ を $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ の CONS で展開して考え, L^2 収束する関数列からは, つねに, a.e. の点で収束する部分列がとれることを使えばよい). そこで,

$$
S'_N := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} U'_\sigma
$$

とすれば,

$$S'_N = WS_NW^{-1}$$

であり，S'_N は $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dN})$ 上への正射影作用素である．ゆえに

$$W\mathrm{Ran}\,(S_N) = \mathrm{Ran}\,(S'_N).$$

すなわち，

$$W\bigotimes_{\mathrm{s}}^{N} L^2(\mathbb{R}^d) = L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dN}).$$

こうして，自然な同型対応の意味で，

$$\bigotimes_{\mathrm{s}}^{N} L^2(\mathbb{R}^d) \cong L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dN})$$

であることが示された．

同様にして，自然な同型対応の意味で，

$$\bigwedge^{N} L^2(\mathbb{R}^d) \cong L^2_{\mathrm{as}}(\mathbb{R}^{dN}),$$

が成り立つことがわかる．

注意 1-7　量子力学の文脈では，ヒルベルト空間 $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dN})$, $L^2_{\mathrm{as}}(\mathbb{R}^{dN})$ の元は，それぞれ，**対称状態関数**，**反対称状態関数**とよばれる．

ノート

テンソル積の概念は，歴史的には，19 世紀後半から 20 世紀初めにかけて，有限次元ベクトル空間の理論において現われた (グラースマン，リッチ，レヴィチヴィタ，カルタン，ポアンカレ等：詳しくは，ブルバキ (1970) の「線型および複線型代数学」の章 (pp.76～87) を参照)．有限次元ベクトル空間のテンソル積については，佐武 (1974) の V 章に味わい深い優れた叙述がある．

ヒルベルト空間のテンソル積は，量子力学の数学的整備と並行する形で，von Neumann and Murray (1936) において初めて導入され，詳しく論じられた．

テンソル積の概念は，もっと一般の位相ベクトル空間へと拡張される．たとえば，Trèves (1967) を参照．

代数や群の表現論においても，テンソル積の理念は重要な役割を演じることを付言しておく．特に，近年，活発に研究され，本書の主題の 1 つである場の量子論の新たな展開の可能性とも深く関わる**量子群**や**非可換微分幾何学**におけるテンソル積の使用については，たとえば，Kassel (1995), Pittner (1996) に詳しい論述がある．

1 章演習問題

$\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \mathscr{H}, \mathscr{K}$ は可分なヒルベルト空間であるとする．

♮**1.** (1.3) 式を証明せよ．

♮**2.** ベクトル空間 $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ から定まる共役双線形形式の全体 $\mathscr{L}_*(\mathscr{V} \times \mathscr{W})$ は，(1.4a) 式, (1.4b) 式によって定義される和とスカラー倍に関してベクトル空間になることを証明せよ．

3. $\Psi_1, \cdots, \Psi_n \in \mathscr{H}_1$ を 1 次独立とする．ベクトル $\Phi_1, \cdots, \Phi_n \in \mathscr{H}_2$ が $\sum_{j=1}^{n} \Psi_j \otimes \Phi_j = 0$ をみたすならば，$\Phi_j = 0 \ (j = 1, \cdots, n)$ であることを証明せよ．

4. $\Phi_1, \cdots, \Phi_n \in \mathscr{H}_2$ を 1 次独立とする．ベクトル $\Psi_1, \cdots, \Psi_n \in \mathscr{H}_1$ が $\sum_{j=1}^{n} \Psi_j \otimes \Phi_j = 0$ をみたすならば，$\Psi_j = 0 \ (j = 1, \cdots, n)$ であることを証明せよ．

♮**5.** 命題 1-4 の証明を遂行せよ．

♮**6.** $L^2(X, d\mu; \mathscr{H})$ の完備性を証明せよ．

7. $m, n \in \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{C}^{mn}$ の元を $\xi = \{\xi_{jk} \,|\, j = 1, \cdots, m, \ k = 1, \cdots, n\}$ のように表す ($\xi_{jk} \in \mathbb{C}$)．$z = (z_j)_{j=1}^m \in \mathbb{C}^m$, $w = (w_k)_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ に対して，$z \circ w \in \mathbb{C}^{mn}$ を $z \circ w := \{z_j w_k \,|\, j = 1, \cdots, m, \ k = 1, \cdots, n\}$ によって定義する．ユニタリ変換 $U : \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{mn}$ で，

$$U(z \otimes w) = z \circ w, \quad z \in \mathbb{C}^m, w \in \mathbb{C}^n \qquad (*)$$

をみたすものがただ 1 つ存在することを証明せよ．

ヒント　$e_{jk} \in \mathbb{C}^{mn}$ を $e_{jk} := \{\delta_{jj'}\delta_{kk'} \,|\, j' = 1, \cdots, m, \ k' = 1, \cdots, n\}$ によって定義する．このとき，$\{e_{jk} \,|\, j = 1, \cdots, m, \ k = 1, \cdots, n\}$ は $\mathbb{C}^{mn}$ の基底である．$\{e_j\}_{j=1}^m$, $\{f_k\}_{k=1}^n$ をそれぞれ，$\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ の標準基底とすれば，補題 1-5 により，$U(e_j \otimes f_k) = e_{jk} \ (j = 1, \cdots, m, \ k = 1, \cdots, n)$ をみたすユニタリ変換 $U : \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{mn}$ がただ 1 つ存在する．これが $(*)$ をみたすことを示せばよい．

注意　この問題の結果は，対応 $(*)$ のもとで，$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ と $\mathbb{C}^{mn}$ が同型であることを示す．この意味で，通常，$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{mn}$ と書かれる．

8. $\mathbb{S}$ を $\mathbb{Z}$ (整数の全体) の無限部分集合とし (たとえば，$\mathbb{S} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \{0\} \cup \mathbb{N}$)，$\mathbb{S}$ 上の絶対 2 乗総和可能な複素数列からなるヒルベルト空間を $l^2(\mathbb{S})$ とする[22]：

$$l^2(\mathbb{S}) := \left\{ a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{S}} \;\middle|\; a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{S}} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

内積は，$\langle a, b \rangle_{l^2(\mathbb{S})} := \sum_{n \in \mathbb{S}} a_n^* b_n$．$l^2(\mathbb{S})$ の場合と同様に，$N \geq 2$ として，直積集合 $\mathbb{S}^N$ 上の絶対 2 乗総和可能な複素数列からなる集合

---

[22] 新井 (1997a) の p.23，例 1.15 を参照.

$$l^2(\mathbb{S}^N) := \left\{ \xi = \{\xi_{i_1\cdots i_N}\}_{i_1,\cdots,i_N \in \mathbb{S}} \;\middle|\; \xi_{i_1\cdots i_N} \in \mathbb{C},\ \sum_{i_1,\cdots,i_N \in \mathbb{S}} |\xi_{i_1\cdots i_N}|^2 < \infty \right\}$$

はベクトル空間であり，内積 $\langle \xi, \eta \rangle_{l^2(\mathbb{S}^N)} := \sum_{i_1,\cdots,i_N \in \mathbb{S}} \xi^*_{i_1\cdots i_N} \eta_{i_1\cdots i_N}$ $(\eta \in l^2(\mathbb{S}^N))$ に関してヒルベルト空間になる．$a^{(j)} \in l^2(\mathbb{S})$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対して，$a^{(1)} \circ \cdots \circ a^{(N)} \in l^2(\mathbb{S}^N)$ を $a^{(1)} \circ \cdots \circ a^{(N)} = \{a^{(1)}_{i_1} \cdots a^{(N)}_{i_N}\}_{i_1,\cdots,i_N \in \mathbb{S}}$ によって定義する．このとき，ユニタリ変換 $U : \overset{N}{\otimes} l^2(\mathbb{S}) \longrightarrow l^2(\mathbb{S}^N)$ で

$$U(a^{(1)} \otimes \cdots \otimes a^{(N)}) = a^{(1)} \circ \cdots \circ a^{(N)}, \quad a^{(j)} \in l^2(\mathbb{S}), j = 1, \cdots, N, \tag{**}$$

をみたすものがただ 1 つ存在することを証明せよ．

ヒント　考え方は前問と同様．

注意　この問題の結果は，同型対応 (∗∗) のもとで，$\overset{N}{\otimes} l^2$ と $l^2(\mathbb{S}^N)$ が同型であることを示す．この意味で，通常，$\overset{N}{\otimes} l^2(\mathbb{S}) \cong l^2(\mathbb{S}^N)$ と書かれる．

9. $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界線形作用素 T (T の定義域は $\mathscr{H}$ 全体であるとする) が**ヒルベルト-シュミット型**であるとは，$\mathscr{H}$ のある CONS$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，$\|T\|_2 := \left(\sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2_{\mathscr{K}} \right)^{1/2}$ が有限のときをいう．ヒルベルト-シュミット型作用素の全体を $\mathfrak{B}_2(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ で表す．$T \in \mathfrak{B}_2(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ としよう．

(i)　$\mathscr{H}$ の任意の CONS $\{e'_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，$\sum_{n=1}^\infty \|Te'_n\|^2_{\mathscr{K}} < \infty$ であり，$\|T\|_2^2 = \sum_{n=1}^\infty \|Te'_n\|^2_{\mathscr{K}}$ であることを証明せよ．さらに，$T^* \in \mathfrak{B}_2(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ であり，$\|T\|_2 = \|T^*\|_2$ が成立することを証明せよ．

(ii)　$S, T \in \mathfrak{B}_2(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ に対して，$\langle S, T \rangle_2 := \sum_{n=1}^\infty \langle Se_n, Te_n \rangle_{\mathscr{K}}$ を定義する．このとき，これは $\mathfrak{B}_2(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ の内積を定め，この内積に関して，$\mathfrak{B}_2(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ はヒルベルト空間になることを証明せよ．

ヒント　(i), (ii) の事実については，たとえば，加藤 (1967) の §45 を参照．

(iii)　各 $\Psi \in \mathscr{H}, \Phi \in \mathscr{K}$ に対して，写像 $T_{\Psi,\Phi} : \mathscr{H}^* \longrightarrow \mathscr{K}$ ($\mathscr{H}^*$ は $\mathscr{H}$ の双対空間) を

$$T_{\Psi,\Phi}(l) := l(\Psi)\Phi, \quad l \in \mathscr{H}^*,$$

によって定義する．このとき，$T_{\Psi,\Phi} \in \mathfrak{B}_2(\mathscr{H}^*, \mathscr{K})$ であり，$\|T_{\Psi,\Phi}\|_2 = \|\Psi \otimes \Phi\|$ であることを証明せよ．

(iv)　$\{e_n\}_{n=1}^\infty, \{f_n\}_{n=1}^\infty$ をそれぞれ，$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ の CONS とするとき，$\{T_{e_m,f_n}\}_{m,n=1}^\infty$ は $\mathfrak{B}_2(\mathscr{H}^*, \mathscr{K})$ の CONS であることを示せ．

(v)　$\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ から $\mathfrak{B}_2(\mathscr{H}^*, \mathscr{K})$ へのユニタリ演算子 U で，すべての $\Psi \in \mathscr{H}, \Phi \in \mathscr{K}$ に

対して

$$U\Psi\otimes\Phi = T_{\Psi,\Phi} \qquad (***)$$

となるものがただ 1 つ存在することを証明せよ．

ヒント　(iv) と補題 1-5 により，$U(e_m\otimes f_n) = T_{e_m,f_n}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ となるユニタリ変換 $U:\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}\longrightarrow\mathfrak{B}_2(\mathscr{H}^*,\mathscr{K})$ がただ 1 つ存在する．この U が $(***)$ をみたすことを示せばよい．

注意　(v) はテンソル積ヒルベルト空間 $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ とヒルベルト空間としてのヒルベルト-シュミット型作用素の空間 $\mathfrak{B}_2(\mathscr{H}^*,\mathscr{K})$ がある自然な仕方で — $(***)$ をみたす対応で — 同型であることを示している．この意味で，$\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}\cong\mathfrak{B}_2(\mathscr{H}^*,\mathscr{K})$ と書く．この同型対応はしばしば有用である．

10. $\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2 := \{\Psi_1\oplus\Psi_2\,|\,\Psi_j\in\mathscr{H}_j,\ j=1,2\}$ を $\mathscr{H}_1$ と $\mathscr{H}_2$ の直和とする[23]．このとき，ユニタリ変換 $U:\mathscr{H}\otimes(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2)\longrightarrow(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_1)\oplus(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_2)$ で $U(\Psi\otimes(\Psi_1\oplus\Psi_2)) = (\Psi\otimes\Psi_1)\oplus(\Psi\otimes\Psi_2)$ $(\Psi\in\mathscr{H},\ \Psi_j\in\mathscr{H}_j,\ j=1,2)$ をみたすものがただ 1 つ存在することを証明せよ．

ヒント　$\mathscr{H}_j$ の 1 つの CONS を $\{e_n^{(j)}\}_{n=1}^\infty$ とすれば，$\{e_n^{(1)}\oplus 0, 0\oplus e_n^{(2)}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ は $\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2$ の CONS である．したがって，$\{e_m\}_{m=1}^\infty$ を $\mathscr{H}$ の CONS とすれば，$\{e_m\otimes(e_n^{(1)}\oplus 0), e_m\otimes(0\oplus e_n^{(2)})\,|\,m,n\in\mathbb{N}\}$ は $\mathscr{H}\otimes(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2)$ の CONS である．一方，$\{(e_m\otimes e_n^{(1)})\oplus 0, 0\oplus(e_m\otimes e_n^{(2)})\,|\,m,\ n\in\mathbb{N}\}$ は $(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_1)\oplus(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_2)$ の CONS である．この事実に注意して，前問 (v) と同様な考え方を適用すればよい．

注意　この問題の同型の意味で，$\mathscr{H}\otimes(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2)\cong(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_1)\oplus(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_2)$ と書く．これを**テンソル積と直和に関する左側分配則**という．

11. ユニタリ変換 $U:(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2)\otimes\mathscr{H}\longrightarrow(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H})\oplus(\mathscr{H}_2\otimes\mathscr{H})$ で $U((\Psi_1\oplus\Psi_2)\otimes\Psi) = (\Psi_1\otimes\Psi)\oplus(\Psi_2\otimes\Psi)$ $(\Psi\in\mathscr{H},\ \Psi_j\in\mathscr{H}_j,\ j=1,2)$ をみたすものがただ 1 つ存在することを証明せよ．

ヒント　前問と同様.

注意　この問題の同型対応 U での同一視 $(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2)\otimes\mathscr{H}\cong(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H})\oplus(\mathscr{H}_2\otimes\mathscr{H})$ を**テンソル積と直和に関する右側分配則**という．

12. $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathscr{H}$ の CONS とするとき，任意の $\psi_1,\cdots,\psi_N\in\mathscr{H}$ に対して，

$$\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_N = \sum_{i_1<\cdots<i_N;\,i_j\in\mathbb{N},j=1,\cdots,N}\begin{vmatrix}\langle e_{i_1},\psi_1\rangle & \cdots & \langle e_{i_1},\psi_N\rangle\\ \langle e_{i_2},\psi_1\rangle & \cdots & \langle e_{i_2},\psi_N\rangle\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \langle e_{i_N},\psi_1\rangle & \cdots & \langle e_{i_N},\psi_N\rangle\end{vmatrix} e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_N}$$

[23] ヒルベルト空間の直和については，新井 (1997a) の 1.3 節 1.3.3 項を参照. $\Psi_1\oplus\Psi_2$ を (Ψ_1,Ψ_2) とも記す．

が成立することを示せ.

13. $N \geq 2$ ならば, $\left(\overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}\right) \cap \left[\overset{N}{\wedge}(\mathscr{H})\right] = \{0\}$ であることを証明せよ.

14. 次の関係式を証明せよ.

$$\left(\overset{N}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}\right)^{\perp} = \left\{\Psi \in \overset{N}{\otimes} \mathscr{H} \;\middle|\; S_N(\Psi) = 0\right\},$$

$$\left[\overset{N}{\wedge}(\mathscr{H})\right]^{\perp} = \left\{\Psi \in \overset{N}{\otimes} \mathscr{H} \;\middle|\; A_N(\Psi) = 0\right\}.$$

15. $\mathscr{H}_j$ をヒルベルト空間とする ($j = 1, \cdots, N$). $\{\psi_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{H}_j$ の収束点列で, $\lim_{n\to\infty} \psi_n^{(j)} = \psi_j \in \mathscr{H}_j$ とする. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_n^{(N)} = \psi^{(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{(N)}$$

を示せ.

第 2 章

線形作用素のテンソル積

テンソル積ヒルベルト空間で働く基本的な線形作用素である，線形作用素のテンソル積を定義し，その基本的性質を調べる．特に，量子物理学への応用において重要な役割を演じる，自己共役作用素のテンソル積についてやや詳しく論じる．

2-1 節　基本的な定義と性質

ヒルベルト空間とそこで働く線形作用素たちは不可分の全体をなす．したがって，テンソル積ヒルベルト空間についても，この上で働く線形作用素たちを考察するのは自然であり，必然的でさえある．この動機を展開することにより，線形作用素のテンソル積という主題が生まれる．

一般に，ヒルベルト空間で定義される線形作用素 T の定義域を $D(T)$ で表す．$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ をヒルベルト空間とし，A, B をそれぞれ，$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ 上の線形作用素とする．$\Psi \otimes \Phi$ ($\Psi \in D(A)$, $\Phi \in D(B)$) という形の元によって生成される部分空間 $D(A) \hat{\otimes} D(B)$ ((1.7) を参照) を定義域とする作用素 $A \hat{\otimes} B$ を

$$(A \hat{\otimes} B)(\Psi \otimes \Phi) := A\Psi \otimes B\Phi \tag{2.1}$$

によって定義する．ここで，$D(A) \hat{\otimes} D(B)$ の任意の元に対しては，線形性によって拡張する．これが実際に定義として意味をなすこと，すなわち，任意の $F \in D(A) \hat{\otimes} D(B)$ に対して，$(A \hat{\otimes} B)(F)$ は，F を $D(A) \hat{\otimes} D(B)$ のベクトルの 1 次結合で表す仕方によらないことを確認しておこう．このために，$F \in D(A) \hat{\otimes} D(B)$ が

$$F = \sum_i \Psi_i \otimes \Phi_i = \sum_j \Psi'_j \otimes \Phi'_j \tag{*}$$

と 2 通りに表されたとする (それぞれ，有限項の和 : $\Psi_i, \Psi'_j \in D(A), \Phi_i, \Phi'_i \in D(B)$). $\{\Psi_i\}_i \cup \{\Psi'_j\}_j$ によって生成される部分空間を $\mathscr{M}_A$，$\{\Phi_i\}_i \cup \{\Phi'_j\}_j$ によって生成される部分空間を $\mathscr{M}_B$ とすれば，これらは有限次元である．$\{\eta_k\}_k$, $\{\theta_l\}_l$ をそれぞれ，$\mathscr{M}_A$, $\mathscr{M}_B$ の正規直交基底としよう．このとき，命題 1-3 によって，$\{\eta_k \otimes \theta_l\}_{k,l}$ は $\mathscr{M}_A \otimes \mathscr{M}_B$ の CONS であるから，$\Psi_i \otimes \Phi_i$, $\Psi'_j \otimes \Phi'_j$ は

$$\Psi_i \otimes \Phi_i = \sum_{k,l} a^i_{kl} \eta_k \otimes \theta_l, \quad \Psi'_j \otimes \Phi'_j = \sum_{k,l} b^j_{kl} \eta_k \otimes \theta_l,$$

という形に展開される．ただし，a^i_{kl}, b^j_{kl} は定数である．(*) によって，任意の k, l に対して，$\sum_i a^i_{kl} = \sum_j b^j_{kl}$ が成り立つ．したがって，

$$(A \hat{\otimes} B)\left(\sum_i \Psi_i \otimes \Phi_i\right) = \sum_{k,l}\left(\sum_i a^i_{kl}\right)(A\eta_k \otimes B\theta_l) = \sum_{k,l}\left(\sum_j b^j_{kl}\right)(A\eta_k \otimes B\theta_l)$$
$$= (A \hat{\otimes} B)\left(\sum_j \Psi'_j \otimes \Phi'_j\right).$$

ゆえに，$A \hat{\otimes} B$ の定義は確かに意味をなす．

線形作用素 $A \hat{\otimes} B$ の基本的性質を調べる前に，線形作用素論における，いくつかの基本概念を復習しておく．

$\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ をヒルベルト空間，T を $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ へ線形作用素とする．$D(T)$ のベクトル列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ と 2 つのベクトル $\Psi \in \mathscr{H}_1, \Phi \in \mathscr{H}_2$ について，$\Psi_n \longrightarrow \Psi$, $T\Psi_n \longrightarrow \Phi$ $(n \longrightarrow \infty)$ ならば，つねに $\Psi \in D(T)$ かつ $T\Psi = \Phi$ が成り立つとき，T は閉 (closed) であるいう．閉である線形作用素を**閉作用素** (closed operator) という．

$\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ への 2 つの線形作用素 S, T について，$D(S) \subset D(T)$ かつ任意の $\Psi \in D(S)$ に対して $S\Psi = T\Psi$ が成り立つとき，T は S の**拡大** (extension) (または S は T の**制限** (restriction)) であるといい，このことを記号的に $S \subset T$ と表す．

線形作用素 T が閉作用素の拡大 (閉拡大) をもつとき，T は**可閉** (closable) であるという．可閉な線形作用素を**可閉作用素** (closable operator) という．

T を可閉作用素とすれば，それは最小の閉拡大をもつ．この閉拡大を T の**閉包** (closure) とよび，記号的に $\bar{T}$ と書く[1)]．これは，各 $\Psi \in D(\bar{T})$ に対して，ベクトル列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty \subset D(T)$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi$, $\lim_{n\to\infty} T\Psi_n = \bar{T}\Psi$ が成立するような作用素である．

T が閉であれば，$\bar{T} = T$ である．

---

1) 「$\bar{T}$ が T の最小の閉拡大である」とは，T の任意の閉拡大を S とすれば，$\bar{T} \subset S$ が成り立つということである．

閉包をとる演算は，作用素の“包含関係”を変えない．すなわち，2 つの可閉作用素 S, T について，

$$S \subset T \Longrightarrow \bar{S} \subset \bar{T}$$

が成り立つ[2]．

次の補題は線形作用素の可閉性の基本的特徴づけをあたえる[3]．

補題 2-1　T を $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ への稠密に定義された線形作用素とする．このとき，T が可閉であるための必要十分条件は，$D(T^*)$ が稠密となることである．この場合，(i) $\bar{T} = T^{**}$ および (ii) $(\bar{T})^* = T^*$ が成立する．

さて，A, B をそれぞれ，$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ 上の線形作用素とする．

補題 2-2　$D(A), D(B)$ が稠密であり，A, B が可閉ならば，$A \hat{\otimes} B$ は可閉である．この場合，

$$A^* \hat{\otimes} B^* \subset (A \hat{\otimes} B)^*, \tag{2.2a}$$

$$\overline{A \hat{\otimes} B} = \overline{\bar{A} \hat{\otimes} \bar{B}}, \tag{2.2b}$$

が成立する．

証明　$D(A)$ と $D(B)$ の稠密性により，$D(A) \hat{\otimes} D(B)$ は稠密である．したがって，$A \hat{\otimes} B$ は共役作用素 $(A \hat{\otimes} B)^*$ をもつ．任意の $F \in D(A) \hat{\otimes} D(B)$ と $G \in D(A^*) \hat{\otimes} D(B^*)$ に対して，$\langle (A \hat{\otimes} B)(F), G \rangle = \langle F, (A^* \hat{\otimes} B^*)(G) \rangle$ であるから，$G \in D((A \hat{\otimes} B)^*)$ かつ $(A \hat{\otimes} B)^* G = (A^* \hat{\otimes} B^*)(G)$．したがって，(2.2a) が成立する．$A, B$ は稠密に定義された可閉作用素であるから，補題 2-1 によって，$D(A^*)$ と $D(B^*)$ は稠密である．したがって，$D(A^*) \hat{\otimes} D(B^*)$ は $\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ で稠密であるから，$D((A \hat{\otimes} B)^*)$ も稠密である．ゆえに，ふたたび，補題 2-1 によって，$A \hat{\otimes} B$ は可閉である．

(2.2b) を証明しよう．定義から，$A \hat{\otimes} B \subset \bar{A} \hat{\otimes} \bar{B}$ は明らかであるので，$\overline{A \hat{\otimes} B} \subset \overline{\bar{A} \hat{\otimes} \bar{B}}$．この逆の関係を示そう (このとき，(2.2b) がしたがう)．任意の $F \in D(\bar{A} \hat{\otimes} \bar{B})$ は，$F = \sum_i \Psi_i \otimes \Phi_i$ $(\Psi_i \in D(\bar{A}), \Phi \in D(\bar{B}))$ と表される (有限項の和)．このとき，各 i に対して，$\Psi_{i,n} \longrightarrow \Psi_i, A\Psi_{i,n} \longrightarrow \bar{A}\Psi_i$, $\Phi_{i,n} \longrightarrow \Phi_i, B\Phi_{i,n} \longrightarrow \bar{B}\Phi_i$ $(n \longrightarrow \infty)$

---

[2]「$A \Longrightarrow B$」は「A ならば B」を表す記法である．

[3] 証明については，たとえば，新井 (1997a) の 2.8 節と命題 2.20 を参照．

をみたす $\Psi_{i,n} \in D(A), \Phi_{i,n} \in D(B)$ が存在する．そこで，$F_n = \sum_i \Psi_{i,n} \otimes \Phi_{i,n}$ とおけば，$F_n \in D(A) \hat{\otimes} D(B)$ であり，$F_n \longrightarrow F$, $(A \hat{\otimes} B)(F_n) \longrightarrow (\bar{A} \hat{\otimes} \bar{B})(F)$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる．これは，$\bar{A} \hat{\otimes} \bar{B} \subset \overline{A \hat{\otimes} B}$ を意味する．ゆえに，$\overline{\bar{A} \hat{\otimes} \bar{B}} \subset \overline{A \hat{\otimes} B}$. □

補題 2-2 によって，次の定義が可能である：A, B を，それぞれ，$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．このとき，

$$A \otimes B := \overline{A \hat{\otimes} B} \tag{2.3}$$

によって定義される，$\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ 上の閉作用素を A と B の**テンソル積**とよぶ．

注意 2-1 (i) 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$(\alpha A) \hat{\otimes} B = A \hat{\otimes} (\alpha B) = \alpha (A \hat{\otimes} B)$ であるから，(2.3) により，

$$(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha (A \otimes B) \tag{2.4}$$

が成り立つ．

(ii) 一般に，ヒルベルト空間からヒルベルト空間への閉作用素 T と，$D(T)$ に含まれる部分空間 $D \subset D(T)$ について，T の D への制限 $T \restriction D$ が可閉であり[4]，$\overline{T \restriction D} = T$ が成り立つとき，D は T の (1 つの) 芯 (core) であるという．

テンソル積 $A \otimes B$ の定義により，$D(A) \hat{\otimes} D(B)$ は $A \otimes B$ の芯であり，$(A \otimes B) \restriction [D(A) \hat{\otimes} D(B)] = A \hat{\otimes} B$ が成立する．

(iii) (2.2b) によって，$A \otimes B = \bar{A} \otimes \bar{B}$ が成立することに注意しよう．このことにより，可閉作用素のテンソル積を考える場合，はじめから，閉作用素のテンソル積を考えても一般性を失わないことがわかる．

(iv) $\mathscr{H}_j, \mathscr{K}_j$ $(j = 1, 2)$ をヒルベルト空間，A_j を $\mathscr{H}_j$ から $\mathscr{K}_j$ への稠密に定義された可閉演算子とする．このとき，上述の議論と同様の論法で，$\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ から $\mathscr{K}_1 \otimes \mathscr{K}_2$ への閉演算子 $A_1 \otimes A_2$ で，

(a) 任意の $\Psi_j \in D(A_j)$ に対して，$(A_1 \otimes A_2)(\Psi_1 \otimes \Psi_2) = A_1 \Psi_1 \otimes A_2 \Psi_2$

(b) $\overline{A_1 \otimes A_2 \restriction D(A_1) \hat{\otimes} D(A_2)} = A_1 \otimes A_2$

をみたすものが構成される．これも A_1 と A_2 のテンソル積とよぶ．これは，上述のテンソル積のほとんど自明な一般化である．以下の多くの議論は，いちいち注意しないが，この一般化された場合にも適用される．

---

[4] 作用素 $T \restriction D$ は，$D(T \restriction D) := D, (T \restriction D)(\psi) := T\psi$ $(\psi \in D)$ によって定義される．

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された作用素 T について，$T \subset T^*$ ならば，T は**対称** (symmetric) であるという．また，$T = T^*$ ならば，T は**自己共役** (self-adjoint) であるという．

補題 2-2 と線形作用素のテンソル積の定義から次の事実を得る．

命題 2-3　A, B を，それぞれ，$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．このとき，

$$A^* \otimes B^* \subset (A \otimes B)^* \tag{2.5}$$

が成立する．特に，A, B がともに対称ならば，$A \otimes B$ も対称である[5]．

証明　(2.5) は (2.2a) と補題 2-1 (ii) による．A, B が対称ならば，$A \subset A^*, B \subset B^*$ によって，$A \hat{\otimes} B \subset A^* \hat{\otimes} B^*$．この関係の閉包をとれば，$A \otimes B \subset A^* \otimes B^*$．これと (2.5) により，$A \otimes B$ は対称である．□

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ からヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ への有界線形作用素 T で $D(T) = \mathscr{H}$ (i.e., 定義域がヒルベルト空間全域) をみたすものの全体を $\mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ で表し，

$$\mathfrak{B}(\mathscr{H}) := \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{H}) \tag{2.6}$$

とおく．

有界線形作用素の空間 $\mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ の元について基本的な事実を述べておく．

補題 2-4　$T, S \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ に対して，稠密な部分空間 D があって，$T \upharpoonright D = S \upharpoonright D$ (i.e., 任意の $\Psi \in D$ に対して，$T\Psi = S\Psi$) が成り立つならば，$T = S$ である．

証明　明らかに，$T \upharpoonright D$ は有界であり，仮定により，$T \upharpoonright D \subset S$．したがって，拡大定理の一意性 (新井 (1997a) の定理 2.8) により，$\overline{T \upharpoonright D} = S$．一方，$\overline{T \upharpoonright D} = T$．したがって，$T = S$．□

作用素 A, B がともに有界の場合には，それらのテンソル積について，より詳しいことがわかる：

命題 2-5　$A \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}), B \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ とする．

---

[5] $A \otimes B$ の自己共役性については，2-4 節で，もっと一般の場合を詳しく論じる．

(i) $D(A\otimes B)=\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ であり，$A\otimes B$ は有界である．さらに，

$$A\otimes B=(A\otimes I)(I\otimes B)=(I\otimes B)(A\otimes I), \tag{2.7}$$

$$\|A\otimes B\|=\|A\|\|B\|, \tag{2.8}$$

が成立する[6]．さらに，任意の $C\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, $D\in\mathfrak{B}(\mathscr{K})$ に対して，

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD), \tag{2.9}$$

$$(A+C)\otimes(B+D)=A\otimes B+A\otimes D+C\otimes B+C\otimes D. \tag{2.10}$$

(ii) $A^*\otimes B^*=(A\otimes B)^*$.

(iii) A, B が自己共役ならば，$A\otimes B$ は自己共役である．

(iv) A, B がユニタリならば，$A\otimes B$ はユニタリである．

証明 (i) $D(A\otimes B)=\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ は，$\overline{\mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{K}}=\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ による．$A\otimes B$ は閉であるから，いま示した事実と閉グラフ定理[7]により，$A\otimes B$ は有界である．

(2.7) が $\mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{K}$ 上でが成立することは直接の計算から容易にわかる[8]．したがって，補題 2-4 により，(2.7) は $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ 上で成立する．

$\{\Psi_j\}_j$, $\{\Phi_k\}_k$ を $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ の CONS とする．任意の $F\in\mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{K}$ は $F=\sum_{j,k}c_{jk}\Psi_j\otimes\Phi_k$ という形に表される ($\Psi_j\in\mathscr{H}$, $\Phi_k\in\mathscr{K}$, $c_{jk}\in\mathbb{C}$)．このとき，$(A\otimes I)(F)=\sum_k\left(\sum_j c_{jk}A\Psi_j\right)\otimes\Phi_k$ であるから，

$$\begin{aligned}\|(A\otimes I)(F)\|^2&=\sum_k\left\|\sum_j c_{jk}A\Psi_j\right\|^2=\sum_k\left\|A\left(\sum_j c_{jk}\Psi_j\right)\right\|^2\\&\le\sum_k\|A\|^2\sum_j|c_{jk}|^2=\|A\|^2\sum_{j,k}|c_{jk}|^2\\&=\|A\|^2\|F\|^2.\end{aligned}$$

$\mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{K}$ は $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ で稠密であるから，この不等式は $\|A\otimes I\|\le\|A\|$ を意味する．同様に，$\|I\otimes B\|\le\|B\|$ が成り立つ．したがって，$\|A\otimes B\|\le\|A\otimes I\|\|I\otimes B\|\le\|A\|\|B\|$.

---

[6] $\|A\|$ は A の作用素ノルム，I は恒等作用素を表す．

[7] 新井-江沢 (1999a) の定理 2.14.

[8] 同じヒルベルト空間で働く 2 つの作用素 A, B に対して，部分空間 $\mathscr{D}\subset D(A)\cap D(B)$ があって，任意の $\Psi\in D$ に対して，$A\Psi=B\Psi$ がみたされるとき，$\mathscr{D}$ 上で $A=B$ が成り立つという．これは，作用素の等式の意味とは違うから注意されたい．

この逆の不等式を示そう (このとき，求める等式 (2.8) がしたがう)．作用素のノルムの定義により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\|A\Psi\| \geq \|A\| - \varepsilon$, $\|B\Phi\| \geq \|B\| - \varepsilon$ をみたす単位ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$, $\Phi \in \mathscr{K}$ が存在する．したがって，$\|\Psi \otimes \Phi\| = 1$ であり，

$$\begin{aligned}\|(A \otimes B)(\Psi \otimes \Phi)\| &= \|A\Psi\|\|B\Phi\| \\ &\geq \|A\|\|B\| - \varepsilon(\|A\| + \|B\|) + \varepsilon^2.\end{aligned}$$

左辺は，作用素のノルムの定義から ($\|\Psi \otimes \Phi\| = 1$ に注意)，$\|A \otimes B\|$ 以下であるから，

$$\|A \otimes B\| \geq \|A\|\|B\| - \varepsilon(\|A\| + \|B\|) + \varepsilon^2$$

を得る．そこで，$\varepsilon > 0$ は任意であるから，$\varepsilon \downarrow 0$ とすることにより，$\|A \otimes B\| \geq \|A\|\|B\|$ が得られる．

(2.9) が $\mathscr{H} \hat{\otimes} \mathscr{K}$ 上で成り立つことはテンソル積の定義から明らか．$(A \otimes B)(C \otimes D)$ および $(AC) \otimes (BD)$ はともに有界であるから，補題 2-4 により，作用素の等式 (2.9) が得られる．

同様にして，(2.10) は，まず，$\mathscr{H} \hat{\otimes} \mathscr{K}$ 上で成り立つ．(2.10) の左辺および右辺は有界であるから，作用素の等式としての (2.10) が得られる．

(ii) いまの場合，$D(A^* \otimes B^*) = \mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ であるから，(2.5) で等号が成立することになる．

(iii) (ii) と $A = A^*, B = B^*$ による．

(iv) この場合，$A^*A = AA^* = I$，$B^*B = BB^* = I$．これと (ii), (2.9) を使うことにより，$(A \otimes B)^*(A \otimes B) = (A \otimes B)(A \otimes B)^* = I$ が示される．□

注意 2-2　非有界作用素に対しては，(2.9), (2.10) は一般には成立しない．

命題 2-6　A, B を，それぞれ，$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．

(i)

$$A^* \otimes I + I \otimes B^* \subset (A \otimes I + I \otimes B)^*$$

が成り立つ[9]．

(ii)　作用素 $A \otimes I + I \otimes B$ は可閉である．

---

[9] 一般に，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_1$ からヒルベルト空間 $\mathscr{H}_2$ への線形作用素 S, T に対して，それらの和 $S + T$ は，特に断らない限り，$D(S+T) := D(S) \cap D(T)$, $(S+T)\psi := S\psi + T\psi$ ($\psi \in D(S) \cap D(T)$) によって定義される．

(iii)　A, B が有界ならば，$A \otimes I + I \otimes B$ は有界であり，

$$\|A \otimes I + I \otimes B\| \le \|A\| + \|B\|,$$

$$A^* \otimes I + I \otimes B^* = (A \otimes I + I \otimes B)^*.$$

(iv)　$A \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ が自己共役ならば，$A \otimes I + I \otimes B$ は有界な自己共役作用素である．

証明　(i) 共役作用素の性質から，

$$(A \otimes I + I \otimes B)^* \supset (A \otimes I)^* + (I \otimes B)^*$$

$$\supset A^* \otimes I + I \otimes B^* \quad (\because \text{命題 2-3}).$$

(ii) (i) により，$D(A^*) \hat{\otimes} D(B^*) \subset D((A \otimes I + I \otimes B)^*)$．$D(A^*) \hat{\otimes} D(B^*)$ は稠密であるから，$D((A \otimes I + I \otimes B)^*)$ は稠密である．したがって，補題 2-1 によって，$A \otimes I + I \otimes B$ は可閉である．

(iii) 有界性と作用素ノルムに対する不等式は命題 2-5 (i) による．共役作用素に関する等式は，(i) と $D(A^* \otimes I + I \otimes B^*) = \mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ から出る．

(iv) $A = A^*$, $B = B^*$ と (iii) による．□

可閉作用素のテンソル積のスペクトルについて簡単にわかることを見ておこう．線形作用素 T の固有値の全体，すなわち，T の**点スペクトル**を $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ で表す．T の固有値 λ に属する固有空間は $\ker(T - \lambda)$ である[10)]．

命題 2-7　A, B を，それぞれ，$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．

(i)

$$\{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A),\, \mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(B)\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A \otimes B)$$

であり，任意の $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(B)$ に対して，

$$\ker(A - \lambda) \hat{\otimes} \ker(B - \mu) \subset \ker(A \otimes B - \lambda\mu).$$

(ii)

$$\{\lambda + \mu \mid \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A),\ \mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(B)\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A \otimes I + I \otimes B)$$

であり，任意の $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(B)$ に対して，

---

10) 線形作用素 S に対して，$\ker S := \{\Psi \in D(S) \mid S\Psi = 0\}$ (S の核 (kernel) あるいは**零空間** (null space))．

$$\ker(A-\lambda)\,\hat{\otimes}\,\ker(B-\mu) \subset \ker(A\otimes I + I\otimes B - \lambda - \mu).$$

証明　(i) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(B)$, $A\Psi = \lambda\Psi$, $B\Phi = \mu\Phi$ ($\Psi \in D(A)$, $\Phi \in D(B)$, $\Psi \neq 0$, $\Phi \neq 0$) とすれば，$\Xi := \Psi\otimes\Phi \in D(A\otimes B)$ ($\Xi \neq 0$) であり，$(A\otimes B)\Xi = (A\Psi)\otimes(B\Phi) = \lambda\mu\Xi$．これから，題意が成立する．

(ii) $(A\otimes I + I\otimes B)\Xi = (A\Psi)\otimes\Phi + \Psi\otimes B\Phi = (\lambda+\mu)\Xi$．これから，題意が成立する．□

作用素のテンソル積は，任意の有限個のヒルベルト空間 $\mathscr{H}_1, \cdots, \mathscr{H}_n$ のテンソル積 $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathscr{H}_j$ 上でも上記の $n=2$ の場合と同様に定義される．すなわち，A_j を $\mathscr{H}_j$ 上の稠密に定義された可閉作用素とすれば，$\hat{\bigotimes}_{j=1}^{n} D(A_j)$ を定義域とする可閉作用素 $\hat{\bigotimes}_{j=1}^{n} A_j$ が

$$\left(\hat{\bigotimes}_{j=1}^{n} A_j\right)\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \Psi_j\right) := \bigotimes_{j=1}^{n}(A_j\Psi_j), \quad \Psi_j \in D(A_j),\ j = 1,\cdots,n, \tag{2.11}$$

によって定義される．この閉包を $\bigotimes_{j=1}^{n} A_j$ あるいは $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_n$ のように記し，$A_1,\cdots,A_n$ の**テンソル積**という．これについては，すべての $n \geq 3$ に対して，帰納的関係

$$A_1\otimes\cdots\otimes A_n := (A_1\otimes\cdots\otimes A_{n-1})\otimes A_n$$

が成り立つ．テンソル積 $\bigotimes_{j=1}^{n} A_j$ に対しても，ここにはいちいち書かないけれども，$n = 2$ の場合における上の諸命題は自然に拡張される．

2-2 節　スペクトルと自己共役作用素 — 復習

作用素のテンソル積のうち，量子力学や場の量子論への応用にとって，特に重要なのは (非有界) 自己共役作用素のテンソル積である．この型の作用素の性質を調べるために，この節では，自己共役作用素に関する基本的性質をまとめておく[11]．

2-2-1　スペクトル

T をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする．複素数 z について，2 つの条件：

[11] より詳しい事柄や証明が述べられていない事項に関しては，新井 (1997a) の 2 章 ~4 章の然るべき箇所を参照されたい．

(i) $A - z$ は単射であり，$(A - z)^{-1}$ は，$\mathrm{Ran}\,(A - z)$ を定義域とする有界作用素，(ii) $\mathrm{Ran}\,(A - z)$ は稠密，がみたされるとき，z は A の**レゾルヴェント集合** — $\varrho(T)$ で表す — に属するという[12]．$\varrho(T)$ の補集合 $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$ を T の**スペクトル**という．T が可閉ならば，$\sigma(T)$ は閉集合である．

対称作用素 T について，ある実定数 γ があって，すべての $\psi \in D(T)$ に対して，$\langle \psi, T\psi \rangle \geq \gamma \|\psi\|^2$ が成り立つとき，T は**下に有界**であるといい，$T \geq \gamma$ と記す．

自己共役作用素のスペクトルについては，次の定理が成り立つ．

定理 2-8　A を自己共役作用素とする．このとき，

(i)　$\sigma(A)$ は $\mathbb{R}$ の閉部分集合である．

(ii)　A が有界ならば，$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$.

(iii)　A が下に有界で，$A \geq \gamma$ ($\gamma \in \mathbb{R}$ は定数) ならば，$\sigma(A) \subset [\gamma, \infty)$.

2-2-2　自己共役性および本質的自己共役性の判定条件

量子物理学への応用においては，あたえられた対称作用素が自己共役であるか否かを決定することが必要になる．このための基礎になるのが次の定理である．

定理 2-9　A をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の対称作用素とする．このとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である (i は虚数単位)[13].

(i)　A は自己共役である．

(ii)　A は閉であり，$\ker\,(A^* \pm i) = \{0\}$.

(iii)　$\mathrm{Ran}\,(A \pm i) = \mathscr{H}$.

対称作用素 A が非負の場合は，A の自己共役性に対する判定条件はもっと簡単になる．

定理 2-10　A を $\mathscr{H}$ 上の非負対称作用素とする ($A \geq 0$)．このとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i)　A は自己共役である．

(ii)　A は閉であり，$\ker\,(A^* + 1) = \{0\}$.

---

[12] レゾルヴェント集合の概念は，通常，多くの教科書では，T が閉作用素の場合にのみ定義されている．この場合には，閉グラフ定理のおかげで，$z \in \varrho(T)$ であることと $A - z$ が全単射であることが同値になる．新井-江沢 (1999a) の 2 章，2.2 節を参照．

[13] 本書では，i は，添字以外の場合，虚数単位を表す．

(iii)　$\mathrm{Ran}\,(A+1) = \mathscr{H}$.

注意 2-3　対称作用素 A が下に有界で，$A \geq \gamma$ ($\gamma \in \mathbb{R}$：定数) ならば，作用素 $\hat{A} := A - \gamma$ は非負対称作用素である．A が自己共役であることと $\hat{A}$ が自己共役であることは同値であるから，下に有界な対称作用素の自己共役性の判定にも定理 2-10 が使える．

A をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の対称作用素とする．

自己共役作用素 B で $A \subset B$ なるものがあるとき，A は**自己共役拡大** (self-adjoint extension) をもつといい，B を A の (1 つの) 自己共役拡大という．

A の閉包 $\bar{A}$ が自己共役であるとき，A は**本質的に自己共役である** (essentially self-adjoint) という．

自己共役作用素は自明的に本質的に自己共役である．

A が本質的に自己共役な対称作用素ならば，$\bar{A}$ は A の 1 つの自己共役拡大であるが，実は，これ以外に A は自己共役拡大をもたない．このことから，あたえられた対称作用素が本質的に自己共役であるか否かを決定する問題も重要である．次の 2 つの定理は，このための基礎である．

定理 2-11　A を $\mathscr{H}$ 上の対称作用素とする．このとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i)　A は本質的に自己共役である．

(ii)　$\ker\,(A^* \pm i) = \{0\}$.

(iii)　$\mathrm{Ran}\,(A \pm i)$ は $\mathscr{H}$ で稠密．

定理 2-12　A を $\mathscr{H}$ 上の非負対称作用素とする ($A \geq 0$)．このとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i)　A は本質的に自己共役である．

(ii)　$\ker\,(A^* + 1) = \{0\}$.

(iii)　$\mathrm{Ran}\,(A+1)$ は $\mathscr{H}$ で稠密．

$D(A)$ の稠密な部分空間 D への A の制限 $A \restriction D$ は対称作用素であるが，これが本質的に自己共役であるとき，A は D 上で本質的に自己共役であるという．この場合，A は本質的に自己共役であり，$\bar{A} = \overline{A \restriction D}$ が成り立つ．

2-2-3　スペクトル測度とスペクトル定理

スペクトル測度と作用素値汎関数

自然数 d に対して，d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ のボレル集合体 ($\mathbb{R}^d$ の開集合全体によって生成される最小の σ 加法族) を $\boldsymbol{B}^d$ によって表す．$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，$\mathfrak{P}(\mathscr{H})$ を $\mathscr{H}$ 上の正射影作用素の全体とする．E を $\boldsymbol{B}^d$ から $\mathfrak{P}(\mathscr{H})$ への写像，すなわち，各 $B \in \boldsymbol{B}^d$ に対し，$\mathscr{H}$ 上の正射影作用素 $E(B)$ をただ 1 つ定める対応とする．したがって，この写像は，正射影作用素の族 (family) $\{E(B) \mid B \in \boldsymbol{B}^d\}$ をあたえる．この族が次の条件 (E.1), (E.2) をみたすとき，これを d 次元の**スペクトル測度** (spectral measure) あるいは**単位の分解** (resolution of identity) という[14)]：

(E.1) $E(\varnothing) = 0$, $E(\mathbb{R}^d) = I$ (恒等作用素).

(E.2) $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n \cap B_m = \varnothing$ $(n \neq m)(B_n \in \boldsymbol{B}^d$, $n = 1, 2, \cdots)$ ならば,

$$E(B) = \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E(B_n).$$

ここで，s-lim は作用素の強収束を表す.

注意 2-4 この定義は，新井 (1997a) の 3 章，3.2 節，3.2.1 項における単位の分解の定義と少し異なるが，同値な定義である．実は，(E.1), (E.2) から次の性質が導かれる：

(E.3) 任意の B_1, $B_2 \in \boldsymbol{B}^d$ に対して,

$$E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2).$$

証明は次の通り：$A \subset B$ $(A,\ B \in \boldsymbol{B}^d)$ ならば，(E.2) を $B_1 = A, B_2 = B \setminus A$, $B_n = \varnothing$ $(n \geq 3)$ として使うことにより,

$$E(B) = E(A) + E(B \setminus A), \quad A \subset B. \tag{2.12}$$

$B_1 \cap B_2 = \varnothing$ $(B_1,\ B_2 \in \boldsymbol{B}^d)$ の場合を考え，$A = B_1$, $B = B_1 \cup B_2$ として応用すれば,

(E.2)'(有限加法性) $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$

を得る．これと，$E(\cdot)^2 = E(\cdot)$ を用いると,

$$E(B_1)E(B_2) = 0, \quad B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

が成立する．したがって，任意の A, $B \in \boldsymbol{B}^d$ に対して,

$$E(A)E(B \setminus A) = 0.$$

[14)] **正射影作用素値測度** (projection-valued measure) ともいう.

ゆえに，$A \subset B$ $(A,\ B \in \boldsymbol{B}^d)$ ならば，

$$E(A)E(B) = E(A)(E(A) + E(B \setminus A)) = E(A)^2 = E(A).$$

同様にして，$E(B)E(A) = E(A)$．まとめると

$$E(A)E(B) = E(B)E(A) = E(A), \quad A \subset B.$$

任意の $B_1,\ B_2 \in \boldsymbol{B}^d$ に対して，

$$B_1 \cup B_2 = B_1 \cap B_2 + C + D$$

と書ける．ただし，$C = B_1 \setminus B_2, D = B_2 \setminus B_1$．(E.2)' により，

$$E(B_1 \cup B_2) = E(B_1 \cap B_2) + E(C) + E(D).$$

両辺に左から，$E(B_j)$ $(j = 1, 2)$ をかけて上の事実を用いると

$$E(B_1) = E(B_1 \cap B_2) + E(C), \quad E(B_2) = E(B_1 \cap B_2) + E(D).$$

これと，$E(C)E(D) = 0$, $E(C)E(B_1 \cap B_2) = 0$, $E(D)E(B_1 \cap B_2) = 0$ から，(E.3) がしたがう．

(E.3) から，$E(B_1)E(B_2) = E(B_2)E(B_1)$ $(B_1,\ B_2 \in \boldsymbol{B}^d)$．したがって，スペクトル測度は，可換な正射影作用素の族である[15]．

$A \subset B$ $(A,\ B \in \boldsymbol{B}^d)$ ならば，(2.12) と $E(\cdot)$ の非負性により，$E(A) \leq E(B)$ が成り立つ (**単調増加性**)．

$E(B) = I$ となる最小の閉集合 $B \subset \mathbb{R}^d$ をスペクトル測度 E の台 (support) とよび，$\mathrm{supp}\, E$ で表す．次の事実は $\mathrm{supp}\, E$ を同定するために使うことができる．

命題 2-13　$\lambda \in \mathbb{R}^d$ とする．$\lambda \in \mathrm{supp}\, E$ であるための必要十分条件は，任意の ε に対して，$E(\{\mu \in \mathbb{R}^d \,|\, |\mu - \lambda| < \varepsilon\}) \neq 0$ が成立することである．

$\{E(B) \,|\, B \in \boldsymbol{B}^d\}$ をスペクトル測度としよう．このとき，各 $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\mu_\Psi(B) := \langle \Psi, E(B)\Psi \rangle = \|E(B)\Psi\|^2, \quad B \in \boldsymbol{B}^d,$$

とおくと，μ_Ψ は可測空間 $(\mathbb{R}^d, \boldsymbol{B}^d)$ 上の有界測度であり，任意の $B \in \boldsymbol{B}^d$ に対して，

$$\mu_\Psi(B) \leq \mu_\Psi(\mathbb{R}^d) = \|\Psi\|^2.$$

$\mathscr{H}$ 上の任意の線形作用素 T に対して，

---

[15] $S,\ T \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ が $ST = TS$ をみたすとき，S と T は可換であるという．

$$\langle \Psi, T\Phi \rangle = \frac{1}{4}\big\{\langle \Psi + \Phi, T(\Psi + \Phi)\rangle - \langle \Psi - \Phi, T(\Psi - \Phi)\rangle$$
$$+ i\langle \Psi - i\Phi, T(\Psi - i\Phi)\rangle - i\langle \Psi + i\Phi, T(\Psi + i\Phi)\rangle\big\},$$
$$\Psi, \Phi \in D(T),$$

が成り立つ．これは**偏極恒等式** (polarization identity) とよばれる．これを $T = E(B)$ $(B \in \boldsymbol{B}^d)$ の場合へ応用すれば，任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ と $B \in \boldsymbol{B}^d$ に対して，

$$\langle \Psi, E(B)\Phi \rangle = \frac{1}{4}\{\mu_{\Psi+\Phi}(B) - \mu_{\Psi-\Phi}(B) + i\mu_{\Psi-i\Phi}(B) - i\mu_{\Psi+i\Phi}(B)\}$$

が成り立つ．したがって，対応 $B \longrightarrow \langle \Psi, E(B)\Phi \rangle$ $(B \in \boldsymbol{B}^d)$ は可測空間 $(\mathbb{R}^d, \boldsymbol{B}^d)$ 上の有界複素測度をあたえる．$\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数 f に対して，この複素測度による積分を

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi \rangle := \frac{1}{4}\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\mu_{\Psi+\Phi}(\lambda) - \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\mu_{\Psi-\Phi}(\lambda) \right.$$
$$\left. + i\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\mu_{\Psi-i\Phi}(\lambda) - i\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\mu_{\Psi+i\Phi}(\lambda) \right\}$$

によって定義する．

$\mathbb{R}^d$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，$\mathscr{H}$ 上の線形作用素 $T_E(f)$ で

$$D(T_E(f)) = \left\{ \Psi \in \mathscr{H} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty \right\}, \tag{2.13a}$$

$$\langle \Phi, T_E(f)\Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d\langle \Phi, E(\lambda)\Psi \rangle, \quad \Psi \in D(T_E(f)),\ \Phi \in \mathscr{H} \tag{2.13b}$$

となるものがただ 1 つ存在する．この作用素 $T_E(f)$ を記号的に $T_E(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, dE(\lambda)$ と表す．

対応：$T_E : f \longrightarrow T_E(f)$ は，$\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数の全体から $\mathscr{H}$ 上の線形作用素の空間への写像 — 作用素値汎関数 — を定める．この写像は一連の法則性をもつ[16)]．この種の写像についての解析あるいはその結果の総体を**作用素解析** (operational calculus, functional calculus) という．この解析に関する基本的な事実を次に記す．

定理 2-14　f, g は $\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数とする．

(i)　任意の $B \in \boldsymbol{B}^d$ に対して，$E(B)T_E(f) \subset T_E(f)E(B)$，すなわち，$T_E(f)E(B)$ は $E(B)T_E(f)$ の拡大である．

16) 詳しくは，新井 (1997a) の 3 章を参照．

(ii)　$E(\{\lambda \mid |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば，$T_E(f)$ は稠密に定義された閉作用素であり，$T_E(f)^* = T_E(f^*)$.

(iii)　f が $\mathrm{supp}\, E$ 上で有界，すなわち，$C_f := \sup_{x \in \mathrm{supp}\, E} |f(x)| < \infty$ ならば，$D(T_E(f)) = \mathscr{H}$ であり，$T_E(f)$ は有界であって，$\|T_E(f)\| \le C_f$.

(iv)　$|f(\lambda)| = 1$ $(\lambda \in \mathbb{R}^d)$ ならば，$T_E(f)$ はユニタリである.

(v)　f が実数値で $E(\{\lambda \mid |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば，$T_E(f)$ は自己共役である．特に，f が $\mathbb{R}^d$ 上の実数値連続関数ならば $T_E(f)$ は自己共役である.

(vi)　$T_E(f) + T_E(g) \subset T_E(f+g)$．特に，$g$ が有界ならば，$T_E(f) + T_E(g) = T_E(f+g)$.

(vii)　$D(T_E(fg)) \cap D(T_E(g)) = D(T_E(f)T_E(g))$，$T_E(f)T_E(g) \subset T_E(fg)$．特に，$g$ が有界ならば，$T_E(f)T_E(g) = T_E(fg)$.

(viii)　f が連続関数ならば

$$\sigma(T_E(f)) = \overline{\{f(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{supp}\, E\}}.$$

(ix)　f_n $(n \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数で，$\mathrm{supp}\, E$ 上で有界であり，かつ $\sup_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathrm{supp}\, E} |f_n(\lambda)| < \infty$ であるとする．また，f も $\mathrm{supp}\, E$ 上で有界であるとする．さらに，$\lim_{n \to \infty} f_n(\lambda) = f(\lambda)$ $(\lambda \in \mathrm{supp}\, E)$ が成立するとする．このとき，すべての $\psi \in \mathscr{H}$ に対して，$\lim_{n \to \infty} \|T_E(f_n)\psi - T_E(f)\psi\| = 0$.

スペクトル定理

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の任意の自己共役作用素 A に対して，1 次元のスペクトル測度 E_A がただ 1 つ存在して，

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_A(\lambda) \tag{2.14}$$

と表される (**スペクトル定理**)．E_A は A の**スペクトル測度**とよばれる．定理 2-14 (viii) をいまの場合に当てはめれば，

$$\sigma(A) = \mathrm{supp}\, E_A \tag{2.15}$$

が得られる．

自己共役作用素 A と $\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，作用素

$$f(A) := T_{E_A}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, dE_A(\lambda) \tag{2.16}$$

が定義される．対応 $f: A \longrightarrow f(A)$ は，$\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素の集合から $\mathscr{H}$ 上の線形作用素の空間への写像をあたえる．

2-3 節　強可換な自己共役作用素の解析

2-3-1　強可換性

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ で働く作用素 S, T に対して，交換子 $[S,T]$ が

$$D([S,T]) := D(ST) \cap D(TS), \quad [S,T] := ST - TS \tag{2.17}$$

が定義される．

もし，$[S,T] = 0$ ならば，S と T は**可換**であるという．また，部分空間 $\mathscr{D} \subset D(ST) \cap D(TS)$ があって，任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して，$[S,T]\Psi = 0$ が成り立つとき，S と T は $\mathscr{D}$ **上で可換**であるという．

$\mathscr{H}$ で働く 2 つの自己共役作用素 S, T について，それらのスペクトル測度が可換のとき，すなわち，すべての J_1, $J_2 \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，$[E_S(J_1), E_T(J_2)] = 0$ が成立するとき，S と T は**強可換** (strongly commuting) であるという．

$\mathscr{H}$ 上の N 個の自己共役作用素 $A_1, \cdots, A_N$ の任意の 2 つ A_j, A_k $(j \neq k)$ が強可換であるとき，$(A_1, \cdots, A_N)$ は強可換であるという．

強可換性は可換性よりも強い概念である．実際，次の命題が成立する[17)]．

命題 2-15　S, T を $\mathscr{H}$ 上の強可換な自己共役作用素とする．このとき，T と S は可換である．

S, T **が非有界の場合，上の命題の逆は一般には成立しない**[18)]．

自己共役作用素の強可換性の特徴づけは次の命題によってあたえられる[19)]．

命題 2-16　S, T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i)　S と T は強可換である．

(ii)　すべての $s, t \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{isS}e^{itT} = e^{itT}e^{isS}$．

---

17) 証明については，新井 (1997a) の定理 4.10 を参照

18) 基本的な反例については，Reed and Simon (1972), §VIII.5, Example 1 (p.273) を参照．ゲージ理論における例が Arai (1992b, 1995b, 1995c, 1996b, 1998) において論じられている．

19) 証明については，新井 (1997a) の定理 4.9 を参照

(iii)　すべての $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，$(S-w)^{-1}(T-z)^{-1} = (T-z)^{-1}(S-w)^{-1}$.

2-3-2　強可換な自己共役作用素と結合スペクトル

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，$A_1, \cdots, A_N$ を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし，これらの組

$$\boldsymbol{A} := (A_1, \cdots, A_N) \tag{2.18}$$

$(N \geq 2)$ は強可換であると仮定する．このとき，$\mathbb{R}^N$ 上のスペクトル測度 $E_{\boldsymbol{A}}$ で，すべての $J_k \in \boldsymbol{B}^1$ $(k = 1, \cdots, N)$ に対して

$$E_{\boldsymbol{A}}(J_1 \times \cdots \times J_N) = E_{A_1}(J_1) \cdots E_{A_N}(J_N) \tag{2.19}$$

をみたすものがただ 1 つ存在する[20]．これを $E_{\boldsymbol{A}} = E_{A_1} \times \cdots \times E_{A_N}$ と記し，$A_1, \cdots, A_N$ の**結合スペクトル測度**とよぶ[21]．この $E_{\boldsymbol{A}}$ を用いると

$$A_j = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_j \, dE_{\boldsymbol{A}}(\lambda) \tag{2.20}$$

と表される $(\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N)$.

結合スペクトル測度 $E_{\boldsymbol{A}}$ の台 $\mathrm{supp}\, E_{\boldsymbol{A}}$ を強可換な自己共役作用素たち $A_1, \cdots, A_N$ の**結合スペクトル** (joint spectrum) といい，$\sigma_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{A})$ で表す：

$$\sigma_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{A}) := \mathrm{supp}\, E_{\boldsymbol{A}}. \tag{2.21}$$

注意 2-5　結合スペクトルの，量子物理学の文脈での物理的解釈は次のごとくである：$A_1, \cdots, A_N$ がある量子系の物理量を表すとしよう．$A_1, \cdots, A_n$ の強可換性は，それらが表す物理量の同時観測可能性を意味する．この同時観測において得られる，$A_1, \cdots, A_N$ の測定値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ の組 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ の全体が $\sigma_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{A})$ である．これは，各物理量 A_j を単独に観測して得られる測定値の全体 $\sigma(A_j)$ の直積と必ずしも等しくならないことを注意しておく (次の命題 2-17 と例 2-1 を参照).

命題 2-17

$$\sigma_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{A}) \subset \sigma(A_1) \times \cdots \times \sigma(A_N). \tag{2.22}$$

---

[20] 新井 (1997a) の 4 章 4.4 節 4.4.2 項を参照.

[21] 前掲書では，$E_{\boldsymbol{A}} = E_{A_1} \otimes \cdots \otimes E_{A_N}$ という書き方をしているが，テンソル積との混同を避けるために，本書では，この記法を用いない．

証明　(2.19) と $\mathrm{supp}\, E_{A_j} = \sigma(A_j)$ ((2.15) の応用) によって，

$$E_{\boldsymbol{A}}(\sigma(A_1)\times\cdots\times\sigma(A_N)) = I.$$

したがって，$\mathrm{supp}\, E_{\boldsymbol{A}} \subset \sigma(A_1)\times\cdots\times\sigma(A_N)$．ゆえに，(2.22) を得る．□

注意 2-6　(2.22) における等号 $\sigma_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{A}) = \sigma(A_1)\times\cdots\times\sigma(A_N)$ は一般には成立しない．次の例を参照せよ．

例 2-1　d を自然数，$m \geq 0$ を定数とする．$\mathbb{R}^d$ 上の関数 ω を

$$\omega(\boldsymbol{k}) := \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}, \quad \boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d,$$

によって定義する．ヒルベルト空間

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ \text{ボレル可測} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{k})|^2\, d\boldsymbol{k} < \infty \right\}$$

において，作用素 $\hat{p}_\mu$ $(\mu = 0, 1, \cdots, d)$ を次のように定義する：

$$D(\hat{p}_0) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^d} |\,\omega(\boldsymbol{k}) f(\boldsymbol{k})\,|^2\; d\boldsymbol{k} < \infty \right\},$$

$$(\hat{p}_0 f)(\boldsymbol{k}) := \omega(\boldsymbol{k}) f(\boldsymbol{k}), \quad \text{a.e.}\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d,\ f \in D(\hat{p}_0), \tag{2.23a}$$

$$D(\hat{p}_j) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^d} |k_j f(\boldsymbol{k})|^2\; d\boldsymbol{k} < \infty \right\},$$

$$(\hat{p}_j f)(\boldsymbol{k}) := k_j f(\boldsymbol{k}), \quad \text{a.e.}\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d,\ f \in D(\hat{p}_j),\ j = 1, \cdots, d. \tag{2.23b}$$

作用素 $\hat{p}_0$ は関数 ω によるかけ算作用素，$\hat{p}_j$ は座標関数 k_j によるかけ算作用素である．したがって，かけ算作用素に関する一般的な定理により，$\hat{p}_\mu$ はいずれも自己共役であり，

$$\sigma(\hat{p}_0) = \{\omega(\boldsymbol{k})\,|\,\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d\} = [m, \infty),$$

$$\sigma(\hat{p}_j) = \{k_j\,|\,\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d\} = \mathbb{R}, \quad j = 1, \cdots, d,$$

が成り立つ[22)]．この例の量子力学的な解釈は次のごとくである：$L^2(\mathbb{R}^d)$ は，質量 m の 1 個の量子力学的粒子の，運動量表示での状態のヒルベルト空間であり ($\boldsymbol{k}$ は粒子の運動量変数)，

$$\hat{p} := (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_d) \tag{2.23c}$$

は，質量が m の相対論的自由粒子のエネルギー・運動量作用素を表す[23]．$\omega(\boldsymbol{k})$ は，この粒子が運動量 $\boldsymbol{k}$ をもつときのエネルギーである．$\hat{p}_\mu$ のスペクトル測度 $E_{\hat{p}_\mu}$ は次のようになる[24]：すべての $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $B \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，

$$(E_{\hat{p}_0}(B)f)(\boldsymbol{k}) = \chi_{\{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d \mid \omega(\boldsymbol{k})\in B\}}(\boldsymbol{k})f(\boldsymbol{k}),$$

$$\left(E_{\hat{p}_j}(B)f\right)(\boldsymbol{k}) = \chi_B(k_j)f(\boldsymbol{k}), \quad j = 1, \cdots, d.$$

ただし，集合 S に対して，χ_S は S の定義関数を表す：$x \in S$ ならば $\chi_S(x) = 1$，$x \notin S$ ならば $\chi_S(x) = 0$．これから，$E_{\hat{p}_0}$, $E_{\hat{p}_1}, \cdots, E_{\hat{p}_d}$ はたがいに可換であることがわかる．したがって，$\hat{p}$ は強可換である．

命題 2-17 によって，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(\hat{p}) \subset [m, \infty) \times \mathbb{R}^d. \tag{2.24}$$

この例では $\sigma_{\mathrm{J}}(\hat{p})$ を正確に同定することができる．実際，

$$V_m := \{k = (k_0, \boldsymbol{k}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mid k_0 = \omega(\boldsymbol{k})\} \tag{2.25}$$

とすれば，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(\hat{p}) = V_m \tag{2.26}$$

である．

(2.26) の証明　(2.20) によって，$\hat{p}_\mu = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} k_\mu \, dE_{\hat{p}}(k)$ $(\mu = 0, \cdots, d)$．すべての $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d$ に対して $\omega(\boldsymbol{k})^2 - \boldsymbol{k}^2 = m^2$ であるから，任意の $f \in \bigcap_{\mu=0}^{d} D(\hat{p}_\mu^2)$ に対して，$\left(\hat{p}_0^2 - \sum_{j=1}^{d} \hat{p}_j^2 - m^2\right) f = 0$．したがって，

$$0 = \left\| \left(\hat{p}_0^2 - \sum_{j=1}^{d} \hat{p}_j^2 - m^2\right) f \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \left|k_0^2 - \omega(\boldsymbol{k})^2\right|^2 d\|E_{\hat{p}}(k)f\|^2.$$

これは，測度 $\|E_{\hat{p}}(\cdot)f\|^2$ に関して a.e.$\boldsymbol{k}$ で，$k_0^2 = \omega(\boldsymbol{k})^2$ を意味する．すなわち，$\mathrm{supp}\,\|E_{\hat{p}}(\cdot)f\|^2 \subset \{k \mid k_0^2 = \omega(\boldsymbol{k})^2\}$．これと (2.24) により，$\mathrm{supp}\,\|E_{\hat{p}}(\cdot)f\|^2 \subset V_m$．特に，

---

[22] 新井 (1997a) の例 2.33，定理 2.25．

[23] ただし，光速 $c = 1$，$\hbar = 1$ の単位系を用いている ($\hbar := h/(2\pi)$, h はプランク定数)．**自由粒子**というのは，他から力を受けずに運動する粒子をさす．

[24] 新井 (1997a) の 3 章練習問題 10 を参照．

$$E_{\hat{p}}(V_m^c)f = 0 \qquad (*)$$

(V_m^c は V_m の補集合)．ところで，$\bigcap_{\mu=0}^{d} D(\hat{p}_\mu^2)$ は稠密である[25]．したがって，作用素 $E_{\hat{p}}(V_m^c)$ の有界性により，$(*)$ はすべての $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に拡張される．ゆえに，$V_m^c \subset (\mathrm{supp}\, E_{\hat{p}})^c$．これは，$\mathrm{supp}\, E_{\hat{p}} \subset V_m$，すなわち，$\sigma_{\mathrm{J}}(\hat{p}) \subset V_m$ を意味する．

逆に，$k \in V_m$ とすれば，$k_0 = \omega(\boldsymbol{k})$．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$I_{\mu,\varepsilon} := (k_\mu - \varepsilon, k_\mu + \varepsilon)$ とし，$I_\varepsilon := I_{0,\varepsilon} \times \cdots \times I_{d,\varepsilon}$ とすれば，$E_{\hat{p}}(I_\varepsilon) = E_{\hat{p}_0}(I_{0,\varepsilon}) \cdots E_{\hat{p}_d}(I_{d,\varepsilon})$. そこで，

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{k}') := \prod_{j=1}^{d} \chi_{I_{j,\varepsilon}}(k'_j), \quad \boldsymbol{k}' \in \mathbb{R}^d,$$

とおけば，$f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^d)$ であり，

$$E_{\hat{p}}(I_\varepsilon) f_\varepsilon(\boldsymbol{k}') = \chi_{\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d \,|\, \omega(\boldsymbol{k}) \in I_{0,\varepsilon}\}}(\boldsymbol{k}') \prod_{j=1}^{d} \chi_{I_{j,\varepsilon}}(k'_j).$$

すべての ε に対して，集合 $\{\boldsymbol{k}' \,|\, \omega(\boldsymbol{k}') \in I_{0,\varepsilon}\}$ および $I_{j,\varepsilon}$ のルベーグ測度は 0 でない．したがって，$L^2(\mathbb{R}^d)$ の元として，$E_{\hat{p}}(I_\varepsilon) f_\varepsilon \neq 0$．これは，作用素として，$E_{\hat{p}}(I_\varepsilon) \neq 0$ を意味する．$I_\varepsilon \subset \{k' \in \mathbb{R}^{d+1} \,|\, |k' - k| < \sqrt{d+1}\,\varepsilon\}$ であるから，$E_{\hat{p}}(\{k' \in \mathbb{R}^{d+1} \,|\, |k' - k| < \sqrt{d+1}\varepsilon\}) \neq 0$．したがって，命題 2-13 により，$k \in \mathrm{supp}\, E_{\hat{p}}$．ゆえに，$V_m \subset \mathrm{supp}\, E_{\hat{p}}$．以上から (2.26) がしたがう． □

集合 V_m は質量 m の**質量超双曲面**とよばれる．これは，質量 m の古典的相対論的自由粒子のエネルギー・運動量ベクトルのとりうる値の全体を表す．

2-3-3 強可換な自己共役作用素の多項式

$A_1, \cdots, A_N$ を前項のものとする．$n_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, N)$ を自然数とし，

$$P(\lambda) := \sum_{\alpha_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{n_N} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_N^{\alpha_N} \qquad (2.27)$$

を N 変数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ の実多項式とする (係数 $C_{\alpha_1 \cdots \alpha_N}$ はすべて実数とする)．これに対して，作用素 $P(\boldsymbol{A})$ を

$$P(\boldsymbol{A}) := \sum_{\alpha_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{n_N} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} A_1^{\alpha_1} \cdots A_N^{\alpha_N} \qquad (2.28)$$

によって定義する．ただし，$D(P(\boldsymbol{A})) := \bigcap_{\alpha_1=0}^{n_1} \cdots \bigcap_{\alpha_N=0}^{n_N} D(A_1^{\alpha_1} \cdots A_N^{\alpha_N})$．また，$A_j^0 :=$

---

[25] たとえば，$\mathbb{R}^d$ 上の連続関数で有界な台をもつものの全体 $C_0(\mathbb{R}^d)$ は $\bigcap_{\mu=0}^{d} D(\hat{p}_\mu^2)$ の部分集合である．

I (恒等作用素) とする．部分空間

$$\mathscr{D}_0(\boldsymbol{A}) := \mathscr{L}\left\{ \prod_{j=1}^{N} E_{A_j}([-R_j, R_j])\Psi \;\middle|\; \Psi \in \mathscr{H},\ R_j > 0,\ j = 1, \cdots, N \right\} \tag{2.29}$$

を導入する．これは稠密である．なぜなら，任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\lim_{R_1,\cdots,R_N \to \infty} \prod_{j=1}^{N} E_{A_j}([-R_j, R_j])\Psi = \Psi$$

が成り立つからである．また，すべての α_j $(j = 1, \cdots, N)$ と $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^N} |\lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_N^{\alpha_N}|^2 \, d\left\| E_{\boldsymbol{A}}(\lambda) \prod_{j=1}^{N} E_{A_j}([-R_j, R_j])\Psi \right\|^2 \\
&= \int_{[-R_1,R_1]\times\cdots\times[-R_N,R_N]} \lambda_1^{2\alpha_1} \cdots \lambda_N^{2\alpha_N} \, d\|E_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Psi\|^2 \\
&\le \left(\prod_{j=1}^{N} R_j^{2\alpha_j} \right) \|\Psi\|^2 < \infty
\end{aligned}$$

であるから，$\mathscr{D}_0(\boldsymbol{A}) \subset D(A_1^{\alpha_1} \cdots A_N^{\alpha_N})$ である．したがって，

$$\mathscr{D}_0(\boldsymbol{A}) \subset D(P(\boldsymbol{A})). \tag{2.30}$$

ゆえに，$P(\boldsymbol{A})$ は稠密に定義されている．

定理 2-18　$\mathscr{D}$ を稠密な部分空間で次の 2 つの条件をみたすとする：(i) $\mathscr{D} \subset D(P(\boldsymbol{A}))$, (ii) 各 $j = 1, \cdots, N$ とすべての $J \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，$E_{A_j}(J)$ は $\mathscr{D}$ を不変にする[26)]：$E_{A_j}(J)\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$．このとき，$P(\boldsymbol{A})$ は $\mathscr{D}$ 上で本質的に自己共役であり，

$$\overline{P(\boldsymbol{A})} = \int_{\mathbf{R}^N} P(\lambda) \, dE_{\boldsymbol{A}}(\lambda) \tag{2.31}$$

が成立する．

注意 2-7　$\mathscr{D}$ の例としては，たとえば，$D(P(\boldsymbol{A}))$ 自体や $\mathscr{D}_0(\boldsymbol{A})$ がある．

証明　$P(\boldsymbol{A})$ のエルミート性[27)]は，命題 2-15 と係数 $C_{\alpha_1\cdots\alpha_N}$ が実数であることによる．これと $D(P(\boldsymbol{A}))$ の稠密性により，$P(\boldsymbol{A})$ は対称作用素である．

---

26) 線形作用素 T と部分空間 $D \subset D(T)$ について，任意の $\Psi \in D$ に対して，$T\Psi \in D$ のとき，T は D を不変にするといい，$TD \subset D$ と記す．

27) ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の線形作用素 T について，任意の $\Psi, \Phi \in D(T)$ に対して，$\langle \Psi, T\Phi \rangle_{\mathscr{H}} = \langle T\Psi, \Phi \rangle_{\mathscr{H}}$ が成り立つとき，この性質をエルミート性という (対称性という場合もある)．

関数 $g(\lambda) := (P(\lambda)+i)^{-1}$ は $\mathbb{R}^N$ 上の有界連続関数であるから,

$$K := \int_{\mathbb{R}^N} g(\lambda)\, dE_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$$

によって定義される作用素 K は有界である．$R>0$ に対して，$V_R = (-R,R]\times\cdots\times(-R,R] = (-R,R]^N$ (区間 $(-R,R]$ の N 個の直積集合) とおく．自然数 n に対して,

$$\lambda_j := -R + \frac{2jR}{n}, \quad I_j^{(n)} := (\lambda_{j-1}, \lambda_j], \quad j=1,\cdots,n$$

とすれば，$(-R,R] = \bigcup_{j=1}^{n} I_j^{(n)}$．したがって，$S_{j_1\cdots j_N}^{(n)} := I_{j_1}^{(n)}\times\cdots\times I_{j_N}^{(n)}$ とおけば，$V_R = \bigcup_{j_1,\cdots,j_N=1}^{n} S_{j_1\cdots j_N}^{(n)}$ と書ける．任意の $\Phi\in\mathscr{H}$ に対して

$$\Phi(n,R) := \sum_{j_1,\cdots,j_N=1}^{n} g(\lambda_{j_1},\lambda_{j_2},\cdots,\lambda_{j_N}) E_{\boldsymbol{A}}(S_{j_1\cdots j_N}^{(n)})\Phi$$

とすれば,

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(n,R) = \int_{V_R} g(\lambda)\, dE_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Phi$$

が示される (強収束)[28]．さらに，$\lim_{R\to\infty}\int_{V_R} g(\lambda)\, dE_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Phi = K\Phi$ もわかる．したがって,

$$K\Phi = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\Phi(n,R). \tag{2.32}$$

さて，$Q := P(\boldsymbol{A})\restriction\mathscr{D}$ ($P(\boldsymbol{A})$ の $\mathscr{D}$ への制限) とおき，$\Psi\in\mathscr{D}$ としよう．このとき，(2.32) によって,

$$K\Psi = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\Psi(n,R). \tag{2.33}$$

(2.19) と仮定の条件 (ii) により，$\Psi(n,R)\in\mathscr{D} = D(Q)$ である．さらに，$\boldsymbol{A}$ の強可換性により，任意の $p\in\mathbb{N}$ と $B\in\boldsymbol{B}^1$ に対して,

$$E_{A_k}(B)A_j^p \subset A_j^p E_{A_k}(B), \quad j,k=1,\cdots,N,$$

が成り立つ[29]．これらの事実から

$$Q\Psi(n,R) = \sum_{j_1,\cdots,j_N=1}^{n} g(\lambda_{j_1},\cdots,\lambda_{j_N}) E_{\boldsymbol{A}}(S_{j_1\cdots j_N}^{(n)})Q\Psi$$

を得る．これと (2.32) によって,

---

[28] 証明の方法は，連続関数についての通常のスティルチェス積分の収束を証明するする場合と同様.

[29] 定理 2-14 (i) を参照.

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty} Q\Psi(n,R) = KQ\Psi.$$

この事実と (2.33) を合わせると，$K\Psi \in D(\bar{Q})$ かつ

$$\bar{Q}K\Psi = KQ\Psi. \tag{2.34}$$

一方，作用素解析により，任意の $\Phi \in D(A_1^{\alpha_1}\cdots A_N^{\alpha_N})$ に対して，

$$A_1^{\alpha_1}\cdots A_N^{\alpha_N}\Phi = \int_{\mathbf{R}^N} \lambda_1^{\alpha_1}\cdots\lambda_N^{\alpha_N}\, dE_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Phi$$

である[30]．したがって，

$$KQ\Psi = KP(\boldsymbol{A})\Psi = \int_{\mathbf{R}^N} g(\lambda)P(\lambda)\, dE_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Psi.$$

ここで，$g(\lambda)P(\lambda) = 1 - ig(\lambda)$ に注意すると，

$$KQ\Psi = \Psi - iK\Psi.$$

これと (2.34) によって，$(\bar{Q}+i)K\Psi = \Psi$．これは，$\mathrm{Ran}\,(\bar{Q}+i) \supset \mathscr{D}$ を意味するので，$\mathrm{Ran}\,(\bar{Q}+i)$ は稠密である．$\bar{Q}$ は閉対称作用素であるから，実は，$\mathrm{Ran}\,(\bar{Q}+i) = \mathscr{H}$ が示せたことになる[31]．全く同様にして，$\mathrm{Ran}\,(\bar{Q}-i) = \mathscr{H}$ がわかる．したがって，定理 2-9 により，$\bar{Q}$ は自己共役である．ゆえに，Q は本質的に自己共役である．これは $P(\boldsymbol{A})$ が $\mathscr{D}$ 上で本質的に自己共役であることを意味する．

作用素解析の一般論により，

$$T_{E_{\boldsymbol{A}}}(P) = \int_{\mathbf{R}^N} P(\lambda)\, dE_{\boldsymbol{A}}(\lambda) \tag{2.35}$$

は自己共役であり，$P(\boldsymbol{A}) \subset T_{E_{\boldsymbol{A}}}(P)$ が成り立つ[32]．本質的に自己共役な作用素はその閉包の他には自己共役拡大をもたないから，$\overline{P(\boldsymbol{A})} = T_{E_{\boldsymbol{A}}}(P)$ でなければならない．ゆえに，(2.31) が導かれる．□

定理 2-14 (viii) を使うと作用素 $\overline{P(\boldsymbol{A})}$ のスペクトルについて次の結果が得られる．

定理 2-19

$$\sigma\left(\overline{P(\boldsymbol{A})}\right) = \overline{\{P(\lambda)\,|\,\lambda \in \mathrm{supp}\, E_{\boldsymbol{A}}\}}.$$

---

[30] 定理 2-14 (vii) を参照．

[31] 一般に，A が閉対称作用素ならば，任意の $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ に対して，$\mathrm{Ran}\,(A-z)$ は閉集合である (新井 (1997a) の補題 2.29 (iii))．

[32] 定理 2-14 (vi) を参照．

作用素 $P(\boldsymbol{A})$ がいつそれ自体ですでに自己共役になっているかを知るのは興味がある．これについては次の定理が成り立つ．

定理 2-20　すべての $\alpha_j = 0, \cdots, n_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対して，

$$\sup_{\lambda_j \in \sigma(A_j),\, j=1,\cdots,N} \frac{|\lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_N^{\alpha_N}|^2}{P(\lambda)^2 + 1} < \infty \tag{2.36}$$

ならば，$P(\boldsymbol{A})$ は自己共役である．

証明　(2.31) をすでに示してあるから，$D(T_{E_{\boldsymbol{A}}}(P)) \subset D(P(\boldsymbol{A}))$ を示せばよい．そこで，$\Psi \in D(T_{E_{\boldsymbol{A}}}(P))$ とすれば，

$$\int_{\mathrm{supp}\, E_{\boldsymbol{A}}} |P(\lambda)|^2 \, d\|E_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Psi\|^2 < \infty.$$

仮定 (2.36) によって，定数 C があって，

$$|\lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_N^{\alpha_N}|^2 \le C(|P(\lambda)|^2 + 1), \quad \lambda_j \in \sigma(A_j),\ j = 1, \cdots, N. \tag{2.37}$$

さて，

$$S_{\boldsymbol{A}} := \mathrm{supp}\, E_{A_1} \times \cdots \times \mathrm{supp}\, E_{A_N}$$

とすれば，命題 2-17 によって，$\mathrm{supp}\, E_{\boldsymbol{A}} \subset S_{\boldsymbol{A}}$ であるから，$\mathbb{R}^N$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda) \, d\|E_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Psi\|^2 = \int_{S_{\boldsymbol{A}}} f(\lambda) \, d\|E_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Psi\|^2.$$

(2.37) によって，

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_N^{\alpha_N}|^2 \, d\|E_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Psi\|^2 \le C \int_{S_{\boldsymbol{A}}} (P(\lambda)^2 + 1) \, d\|E_{\boldsymbol{A}}(\lambda)\Psi\|^2 < \infty.$$

これは任意の $\alpha_j = 0, 1, \cdots, n_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対して成り立つから，$\Psi \in \bigcap_{\alpha_1=0}^{n_1} \cdots \bigcap_{\alpha_N=0}^{n_N} D(A_1^{\alpha_1} \cdots A_N^{\alpha_N}) = D(P(\boldsymbol{A}))$. □

系 2-21　各 A_j $(j = 1, \cdots, N)$ が下に有界で $A_j \ge c_j$ (c_j は実定数) ならば，$\sum_{j=1}^N A_j$ は自己共役であり，$\sum_{j=1}^N A_j \ge \sum_{j=1}^N c_j$.

証明　$\sum_{j=1}^N A_j$ の自己共役性については，$A_j \ge 0$ $(j = 1, \cdots, N)$ の場合を示せば十分

である．実際，$B_j = A_j - c_j$ とおけば，$B_j \geq 0$ であり，$\sum_{j=1}^N A_j = \sum_{j=1}^N B_j + \sum_{j=1}^N c_j$ となるから，$\sum_{j=1}^N B_j$ の自己共役性から，$\sum_{j=1}^N A_j$ の自己共役性がでる．そこで，$A_j \geq 0$ とする．このとき，仮定と定理 2-8 (iii) により，$\sigma(A_j) \subset [0, \infty)$．定理 2-20 で $P(\lambda) = \sum_{j=1}^N \lambda_j$ の場合を考え，定理 2-20 の仮定 (2.36) がみたされることを示せばよい．実際，容易にわかるように，任意の $n = 1, \cdots, N$ に対して，

$$\sup_{\lambda_j \in \sigma(A_j),\, j=1,\cdots,N} \frac{|\lambda_n|^2}{\left(\sum_{j=1}^N \lambda_j\right)^2 + 1} \leq 1.$$

よって，定理 2-20 により，$\sum_{j=1}^N A_j$ は自己共役である．

不等式 $\sum_{j=1}^N A_j \geq \sum_{j=1}^N c_j$ は容易であろう．□

2-4 節　自己共役作用素のテンソル積の本質的自己共役性とスペクトル

2-4-1　本質的自己共役性

前節までの結果を自己共役作用素のテンソル積に応用する．$\mathscr{H}_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ をヒルベルト空間とする．

補題 2-22　$j = 1, \cdots, N$ を任意に固定し，$E_j = \{E_j(J) \,|\, J \in \boldsymbol{B}^d\}$ を $\mathscr{H}_j$ 上の d 次元のスペクトル測度とする．各 $J \in \boldsymbol{B}^d$ に対して，$\bigotimes_{j=1}^N \mathscr{H}_j$ 上の作用素 $\tilde{E}_j(J)$ を

$$\tilde{E}_j(J) := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overbrace{E_j(J)}^{j\text{ 番目}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I}_{N\text{ 個}} \tag{2.38}$$

によって定義する (I は恒等作用素)．このとき，

$$\tilde{E}_j := \{\tilde{E}_j(J) \,|\, J \in \boldsymbol{B}^d\} \tag{2.39}$$

は $\bigotimes_{k=1}^N \mathscr{H}_k$ 上の d 次元のスペクトル測度である．

証明　証明を通して，$E_j(J) = E(J)$, $\tilde{E}_j(J) = F(J)$ とおく．命題 2-5 (iii) によって，

$F(J)$ は有界な自己共役作用素である．(2.9) と $E(J)^2 = E(J)$ によって，$F(J)^2 = F(J)$．ゆえに，$F(J)$ は正射影作用素である．$F(\mathbb{R}^d) = I$, $F(\varnothing) = 0$ は明らか．$J_n \in \boldsymbol{B}^d$ $(J_n \cap J_m = \varnothing, n \neq m)$, $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ とすれば，任意の $\Psi_j \in \mathscr{H}_j$ に対して，$\left\| E(J)\Psi_j - \sum_{n=1}^{M} E(J_n)\Psi_j \right\| \longrightarrow 0$ $(M \longrightarrow \infty)$ であるから，任意の $\Psi_k \in \mathscr{H}_k$ $(k \neq j)$ に対して，$\Psi = \bigotimes_{k=1}^{N} \Psi_k$ とおけば，

$$\left\| F(J)\Psi - \sum_{n=1}^{M} F(J_n)\Psi \right\| = \left\| E(J)\Psi_j - \sum_{n=1}^{M} E(J_n)\Psi_j \right\| \left(\prod_{k \neq j} \|\Psi_k\| \right)$$

$$\longrightarrow 0, \quad M \longrightarrow \infty.$$

これは，すべての $\Psi \in \hat{\bigotimes}_{k=1}^{N} \mathscr{H}_k$ に対して，$F(J)\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} F(J_n)\Psi$ を意味する．作用素の列 $\left\{ \sum_{n=1}^{M} F(J_n) \right\}_{M=1}^{\infty}$ が有界である．実際，

$$\left\| \sum_{n=1}^{M} F(J_n) \right\| = \left\| I \otimes \cdots \otimes E\left(\bigcup_{n=1}^{M} J_n \right) \otimes \cdots \otimes I \right\| = \left\| E\left(\bigcup_{n=1}^{M} J_n \right) \right\| \leq 1.$$

$\hat{\bigotimes}_{k=1}^{N} \mathscr{H}_k$ は $\bigotimes_{k=1}^{N} \mathscr{H}_k$ で稠密である．したがって，付録 A の命題 A-2 を応用することにより，すべての $\Psi \in \bigotimes_{k=1}^{N} \mathscr{H}_k$ に対して，$F(J)\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} F(J_n)\Psi$ が成立することになる．こうして，$\{F(J) \mid J \in \boldsymbol{B}^d\}$ は d 次元のスペクトル測度であることが示される．□

各 $j = 1, \cdots, N$ に対して，A_j を $\mathscr{H}_j$ 上の自己共役作用素とする．任意の $J \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，

$$\tilde{E}_{A_j}(J) := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overbrace{E_{A_j}}^{j\text{ 番目}}(J) \otimes I \otimes \cdots \otimes I}_{N\text{ 個}} \tag{2.40}$$

とすれば，補題 2-22 によって，

$$\tilde{E}_{A_j} := \{\tilde{E}_{A_j}(J) \mid J \in \boldsymbol{B}^1\} \tag{2.41}$$

は $\bigotimes_{j=1}^{N} \mathscr{H}_j$ 上のスペクトル測度である．

$j = 1, \cdots, N$ に対して，

$$\tilde{A}_j := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overbrace{A_j}^{j\ 番目} \otimes I \otimes \cdots \otimes I}_{N\ 個} \tag{2.42}$$

とおく．

補題 2-23

(i)　各 $\tilde{A}_j$ は自己共役であり，そのスペクトル測度は $\tilde{E}_{A_j}$ である．

(ii)　$\{\tilde{A}_j\}_{j=1}^N$ は強可換である．

証明　(i) 稠密な部分空間

$$D_{A_j} := \mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathscr{H}_{j-1} \hat{\otimes} D(A_j) \hat{\otimes} \mathscr{H}_{j+1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathscr{H}_N$$

の上で，$\tilde{A}_j$ は対称である．作用素のテンソル積の定義によって，D_{A_j} は $\tilde{A}_j$ の芯 (core) であるから，$\tilde{A}_j$ は閉対称作用素である．任意の $\Psi_k \in \mathscr{H}_k$ $(k = 1, \cdots, N)$ に対して，$\Phi_j := (A_j + i)^{-1}\Psi_j$ $(\Phi_k := \Psi_k,\ k \neq j)$ とおけば，$\Phi := \bigotimes_{k=1}^N \Phi_k \in D_{A_j}$ であり，$(\tilde{A}_j + i)\Phi = \bigotimes_{k=1}^N \Psi_k$．したがって，$\hat{\bigotimes}_{k=1}^N \mathscr{H}_k \subset \mathrm{Ran}\,[(\tilde{A}_j + i) \restriction D_{A_j}]$ である．ゆえに，$\mathrm{Ran}\,[(\tilde{A}_j + i) \restriction D_{A_j}]$ は $\bigotimes_{k=1}^N \mathscr{H}_k$ で稠密である．同様に，$\mathrm{Ran}\,[(\tilde{A}_j - i) \restriction D_{A_j}]$ も稠密であることがわかる．したがって，定理 2-11 により，$\tilde{A}_j$ は D_{A_j} 上で本質的に自己共役である．したがって，$\tilde{A}_j$ は自己共役である．

作用素解析により，

$$T_j := \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\tilde{E}_{A_j}(\lambda)$$

は自己共役である．任意の $\Phi_j \in D(A_j)$ $(\Phi_k \in \mathscr{H}_k,\ k \neq j)$ に対して，$\Phi := \bigotimes_{k=1}^N \Phi_k \in D(T_j)$ である．実際，

$$\int_{\mathbf{R}} |\lambda|^2\, d\|\tilde{E}_{A_j}(\lambda)\Phi\|^2 = \left(\prod_{k \neq j} \|\Phi_k\|^2\right) \int_{\mathbf{R}} |\lambda|^2\, d\|E_{A_j}(\lambda)\Phi_j\|^2 < \infty.$$

したがって，任意の $\Psi_k \in \mathscr{H}_k$ に対して，$\Psi := \bigotimes_{k=1}^N \Psi_k$ とおけば，

$$\langle \Psi, \tilde{A}_j \Phi \rangle = \langle \Psi_j, A_j \Phi_j \rangle \prod_{k \neq j} \langle \Psi_k, \Phi_k \rangle = \left(\prod_{k \neq j} \langle \Psi_k, \Phi_k \rangle\right) \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\langle \Psi_j, E_{A_j}(\lambda)\Phi_j \rangle$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\langle \Psi, \tilde{E}_{A_j}(\lambda)\Phi \rangle$$

$$= \langle \Psi, T_j \Phi \rangle.$$

これは，すべての $\eta \in \hat{\bigotimes}_{k=1}^{N} \mathscr{H}_k$ と $\chi \in D_{A_j}$ に対して，$\langle \eta, \tilde{A}_j \chi \rangle = \langle \eta, T_j \chi \rangle$ を意味する．これと $\hat{\bigotimes}_{j=1}^{N} \mathscr{H}_j$ の稠密性により，$\tilde{A}_j \chi = T_j \chi$．これは，$\tilde{A}_j \restriction D_{A_j} \subset T_j$ を意味する．すでに見たように，$\tilde{A}_j$ は D_{A_j} 上で本質的自己共役であるから，本質的自己共役作用素の自己共役拡大の一意性により，$\tilde{A}_j = T_j$．ゆえに，$\tilde{E}_{A_j}$ は $\tilde{A}_j$ のスペクトル測度である．

(ii) 命題 2-5 の (2.7) の一般化により，任意の $J_1, J_2 \in \boldsymbol{B}^1$ と $j, k = 1, \cdots, N$ $(j \neq k)$ に対して，$\tilde{E}_{A_j}(J_1)\tilde{E}_{A_k}(J_2) = \tilde{E}_{A_k}(J_2)\tilde{E}_{A_j}(J_1)$ であることがわかる．この結果と (i) により，求める結果を得る． □

補題 2-23 によって，N 次元のスペクトル測度

$$E^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N} := \tilde{E}_{A_1} \times \cdots \times \tilde{E}_{A_N} \tag{2.43}$$

が定義される．任意の $J_j \in \boldsymbol{B}^1$ $(j = 1, \cdots, N)$ に対して，

$$E^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}(J_1 \times \cdots \times J_N) = \bigotimes_{j=1}^{N} E_{A_j}(J_j) \tag{2.44}$$

であることに注意しよう．

(2.27) によってあたえられる実多項式 P に対して，

$$P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N} := \sum_{\alpha_j=0}^{n_1} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{n_N} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} A_1^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes A_N^{\alpha_N} \tag{2.45}$$

を定義する．ここで，$D(P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}) := \bigcap_{\alpha_1=0}^{n_1} \cdots \bigcap_{\alpha_N=0}^{n_N} D(A_1^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes A_N^{\alpha_N})$．

一般に，任意の自己共役作用素 A と自然数 m, n について，$m \geq n$ ならば，$D(A^m) \subset D(A^n)$ であるから，

$$\hat{\bigotimes}_{j=1}^{N} D(A_j^{n_j}) \subset D(P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}).$$

左辺の集合は稠密であるから，$D(P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N})$ は稠密である．この事実と各作用素 $A_1^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes A_N^{\alpha_N}$ が閉対称作用素であることにより，$P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}$ は対称作用素であることがわかる．

対称作用素 $P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}$ の本質的自己共役性を示すために，補題を 1 つ用意する．

補題 2-24 A をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし，$k \in \mathbb{N}$ とする．ベクトル

列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A^k)$ とベクトル $\Psi \in D(A^k)$ が $\Psi_n \longrightarrow \Psi$, $A^k\Psi_n \longrightarrow A^k\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ をみたすとする．このとき，任意の $j = 1, \cdots, k$ に対して，$A^j\Psi_n \longrightarrow A^j\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$.

証明　$\Phi_n = \Psi_n - \Psi$ とおくと，$\|\Phi_n\| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$．また，$\|A^k\Psi_n - A^k\Psi\|^2 = \int_{\mathbf{R}} \lambda^{2k}\, d\|E_A(\lambda)\Phi_n\|^2$ であるから，

$$\int_{\mathbf{R}} \lambda^{2k}\, d\|E_A(\lambda)\Phi_n\|^2 \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

したがって，$j = 1, \cdots, k$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|A^j\Psi_n - A^j\Psi\|^2 &= \int_{\mathbf{R}} \lambda^{2j}\, d\|E_A(\lambda)\Phi_n\|^2 \\
&= \int_{|\lambda|\le 1} \lambda^{2j}\, d\|E_A(\lambda)\Phi_n\|^2 + \int_{|\lambda|>1} \lambda^{2j}\, d\|E_A(\lambda)\Phi_n\|^2 \\
&\le \|\Phi_n\|^2 + \int_{|\lambda|\ge 1} \lambda^{2k}\, d\|E_A(\lambda)\Phi_n\|^2 \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).
\end{aligned}$$

ゆえに題意が成立する．□

注意 2-8　自己共役作用素 A が非負ならば，任意の $\alpha > 0$ に対して，作用素解析を介して，A^α が定義される．この場合，補題 2-24 の仮定のもとで，任意の $0 < \alpha < k$ に対して，$A^\alpha\Psi_n \longrightarrow A^\alpha\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ が成り立つ (証明は全く同様).

定理 2-25　各 j に対して，D_j を $A_j^{n_j}$ の芯とする．このとき，$P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}$ は $\hat{\otimes}_{j=1}^{N} D_j$ 上で本質的に自己共役である．さらに，

$$\overline{P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}} = \int_{\mathbf{R}^N} P(\lambda)\, dE^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}(\lambda) \tag{2.46}$$

が成立する．

証明　まず，作用素 $P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}$ は $\hat{\otimes}_{j=1}^{N} D(A_j^{n_j})$ 上で本質的に自己共役であることを示そう．$A_j^{n_j}$ は自己共役であり，任意の $J \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，$E_{A_j}(J)$ は $D(A_j^{n_j})$ を不変にする．したがって，各 $\tilde{E}_{A_j}(J)$ $(J \in \boldsymbol{B}^1)$ は $\hat{\otimes}_{k=1}^{N} D(A_k^{n_k})$ を不変にする．ゆえに，定

理 2-18 によって，$P(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_N)$ は $\hat{\bigotimes}_{k=1}^{N} D(A_k^{n_k})$ 上で本質的に自己共役であり，

$$\overline{P(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_N)} = \int_{\mathbf{R}^N} P(\lambda)\, dE_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes}(\lambda).$$

一方，

$$P(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_N) \restriction \hat{\bigotimes}_{k=1}^{N} D(A_k^{n_k}) = P_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes} \restriction \hat{\bigotimes}_{k=1}^{N} D(A_k^{n_k}).$$

したがって，$P_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes}$ は $\hat{\bigotimes}_{j=1}^{N} D(A_j^{n_j})$ 上で本質的に自己共役であり，(2.46) が成立する．

D_j についての仮定により，任意の $\Psi_j \in D(A_j^{n_j})$ に対して，$\Psi_{j,m} \longrightarrow \Psi_j$, $A_j^{n_j}\Psi_{j,m} \longrightarrow A_j^{n_j}\Psi_j$ $(m \longrightarrow \infty)$ となる $\Psi_{j,m} \in D_j$ がある．このとき，補題 2-24 により，すべての $\alpha_j \leq n_j$ に対して，$\Psi_{j,m} \in D(A_j^{\alpha_j})$ であり，$A_j^{\alpha_j}\Psi_{j,m} \longrightarrow A_j^{\alpha_j}\Psi_j$ $(m \longrightarrow \infty)$．そこで，$\Psi_m = \bigotimes_{j=1}^{N} \Psi_{j,m}$ とおけば，$\Psi_m \in D(P_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes})$ であり，$\Psi_m \longrightarrow \Psi$, $P_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes}\Psi_m \longrightarrow P_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes}\Psi$ $(m \longrightarrow \infty)$ が成立する．これは

$$P_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes} \restriction \hat{\bigotimes}_{j=1}^{N} D(A_j^{n_j}) \subset \overline{P_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes} \restriction \hat{\bigotimes}_{j=1}^{N} D_j}$$

を意味する．この事実と前半の結果により，$P_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes}$ は $\hat{\bigotimes}_{j=1}^{N} D_j$ 上で本質的に自己共役であることがわかる． □

定理 2-20 の証明と同様にして，次の結果を得る．

定理 2-26 多項式 P について，(2.36) が成り立つならば，$P_{A_1,\cdots,A_N}^{\otimes}$ は自己共役である．

系 2-27 各 j に対して，D_j を A_j の芯とする．

(i) 作用素 $\bigotimes_{j=1}^{N} A_j$ は $\hat{\bigotimes}_{j=1}^{N} D_j$ 上で本質的に自己共役である．

(ii) 作用素 $\sum_{j=1}^{N} \tilde{A}_j$ は $\hat{\bigotimes}_{j=1}^{N} D_j$ 上で本質的に自己共役である．

(iii) 定数 c_j があって，$A_j \geq c_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ ならば，$\sum_{j=1}^{N} \tilde{A}_j$ は自己共役であり，$\sum_{j=1}^{N} \tilde{A}_j \geq \sum_{j=1}^{N} c_j$.

証明　(i) 定理 2-25 を $P(\lambda)=\lambda_1\cdots\lambda_N$ の場合に応用すればよい．

(ii) 定理 2-25 を $P(\lambda)=\lambda_1+\cdots+\lambda_N$ の場合に応用すればよい．

(iii) は系 2-21 による．□

2-4-2　スペクトル

自己共役作用素 $\overline{P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}}$ のスペクトルがどうなるかを調べよう．次の補題に注目する．

補題 2-28

$$\operatorname{supp} E^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}=\sigma(A_1)\times\cdots\times\sigma(A_N). \tag{2.47}$$

証明　証明を通して，$E=E^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}$, $S_j=\operatorname{supp} E_{A_j}$, $S=S_1\times\cdots\times S_N$ とおく (したがって，$E_{A_j}(S_j)=I$)．(2.47) を示すには，$\operatorname{supp} E=S$ を証明すればよい．まず，$E(S)=E_{A_1}(S_1)\otimes\cdots\otimes E_{A_N}(S_N)=I$ であるから，$\operatorname{supp} E\subset S$．逆の包含関係を示すために，

$$(\operatorname{supp} E)^c\subset S^c$$

を示そう．$\lambda\in(\operatorname{supp} E)^c$ とする．$(\operatorname{supp} E)^c$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合であるから，ある正数 δ が存在して，$U_\delta:=\{\mu\in\mathbb{R}^N\,|\,|\lambda-\mu|<\delta\}\subset(\operatorname{supp} E)^c$．したがって，$E(U_\delta)=0$．このとき，$(\lambda_1-\delta/N,\lambda_1+\delta/N)\times\cdots(\lambda_N-\delta/N,\lambda_N+\delta/N)\subset U_\delta$．したがって，$E_{A_1}((\lambda_1-\delta/N,\lambda_1+\delta/N))\otimes\cdots\otimes E_{A_N}((\lambda_N-\delta/N,\lambda_N+\delta/N))=0$．これは，$E_{A_j}((\lambda_j-\delta/N,\lambda_j+\delta/N))$ のうち少なくとも 1 つは 0 であることをを意味する．したがって，$\lambda_j\in S_j^c$ となる j がある．ゆえに，$\lambda\in S^c$．□

定理 2-25，補題 2-28 および定理 2-14 (viii) によって，次の結果を得る．

定理 2-29　A_j を $\mathscr{H}_j$ 上の自己共役作用素とする．このとき，

$$\sigma\left(\overline{P^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}}\right)=\overline{\{P(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(A_1)\times\cdots\times\sigma(A_N)\}}.$$

特に，

$$\sigma(A_1\otimes\cdots\otimes A_N)=\overline{\{\lambda_1\cdots\lambda_N\,|\,\lambda_j\in\sigma(A_j),\ j=1,\cdots,N\}},$$

$$\sigma\left(\sum_{j=1}^N\tilde{A}_j\right)=\overline{\left\{\sum_{j=1}^N\lambda_j\ \middle|\ \lambda_j\in\sigma(A_j),j=1,\cdots,N\right\}}.$$

自己共役作用素のテンソル積の固有値 (点スペクトル) がどうなっているか調べるために，**スペクトル定理のかけ算作用素形式**を述べる．

定理 2-30 $\mathscr{H}$ を可分なヒルベルト空間，A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，有限測度空間 (M,μ) とユニタリ作用素 $U:\mathscr{H}\longrightarrow L^2(M,d\mu)$ および M 上の，μ-a.e. 有限な実数値可測関数 F が存在して，作用素の等式 $UAU^{-1}=F$ が成立する (右辺は関数 F によるかけ算作用素を表す)．

この定理の証明については，たとえば，Reed and Simon (1972) の Theorem VIII.4 を参照されたい．

定理 2-31 $\mathscr{H}_j$ は可分なヒルベルト空間であるとし，A_j を $\mathscr{H}_j$ 上の自己共役作用素とする．このとき，点スペクトルについて，次の関係式が成り立つ．

$$\sigma_{\mathrm{p}}\left(\overline{\sum_{j=1}^N \tilde{A}_j}\right)=\left\{\sum_{j=1}^N \lambda_j \;\middle|\; \lambda_j\in\sigma_{\mathrm{p}}(A_j),\ j=1,\cdots,N\right\}, \tag{2.48}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}\left(\bigotimes_{j=1}^N A_j\right)=\left\{\prod_{j=1}^N \lambda_j \;\middle|\; \lambda_j\in\sigma_{\mathrm{p}}(A_j),\ j=1,\cdots,N\right\}. \tag{2.49}$$

証明 $N=2$ の場合について，証明すれば十分である (任意の N に対しては，帰納的に証明できる)．$N=2$ の場合の (2.48) の左辺，右辺の集合をそれぞれ，S_l, S_r とし，$B:=\overline{\tilde{A}_1+\tilde{A}_2}$ とおく．命題 2-7 (ii) によって，$S_r\subset S_l$．逆の包含関係を示すために，$\lambda\in S_l$ としよう．したがって，$B\Psi=\lambda\Psi$ となる $\Psi\in D(B)\,(\Psi\neq 0)$ が存在する．定理 2-30 によって，有限測度空間 (M_j,μ_j) $(j=1,2)$ とユニタリ作用素 $U_j:\mathscr{H}_j\longrightarrow L^2(M_j,d\mu_j)$ および M_j 上の，μ_j-a.e. 有限な実数値可測関数 F_j が存在して，作用素の等式 $U_jA_jU_j^{-1}=F_j$ が成立する．$U:=U_1\otimes U_2$ とすれば，これは，$\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ から $L^2(M_1,d\mu_1)\otimes L^2(M_2,d\mu_2)\cong L^2(M_1\times M_2,d\mu_1\otimes d\mu_2)$ へのユニタリ作用素であり，作用素の等式 $UBU^{-1}=F_1+F_2$ が成立する．したがって，$\Phi:=U\Psi\in L^2(M_1\times M_2,d\mu_1\otimes d\mu_2)$ とおけば，$(F_1+F_2)\Phi=\lambda\Phi$ を得る．各 $y\in M_2$ に対して，M_1 上の関数 ϕ_y を $\phi_y(x):=\Phi(x,y)$ $(x\in M_1)$ によって定義すれば，いまの等式は，μ_2-a.e.y に対して，$L^2(M_1,d\mu_1)$ における等式 $F_1\phi_y=(\lambda-F_2(y))\phi_y$ を意味する．$\Phi\neq 0$ とフビニの定理により，$\mu_2(K)>0$ となる $K\subset M_2$ が存在して，$y\in K$ ならば，$L^2(M_1,d\mu_1)$ の元として $\phi_y\neq 0$．したがって，任意の $y\in K$ に対して，ϕ_y は F_1 の固有ベクトルであり，対応する固有値は $\lambda-F_2(y)$ である．したがって，$\mu\in\sigma_{\mathrm{p}}(A_1)=\sigma_{\mathrm{p}}(F_1)$ に対して，$K_\mu:=\{y\in M_2\,|\,F_2(y)=\lambda-\mu\}$ とおけば，$K\subset$

$\bigcup_{\mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(A_1)} K_\mu$ が成立する．ところで，$\sigma_{\mathrm{p}}(A_1)$ の濃度は高々可算である[33]．$\mu_2(K) \neq 0$ であるから，ある $\mu_0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(A_1)$ があって，$\mu_2(K_{\mu_0}) \neq 0$．したがって，K_{μ_0} の定義関数 $\chi_{K_{\mu_0}}$ は $L^2(M_2, d\mu_2)$ の元として零ではなく，$F_2\chi_{K_{\mu_0}} = (\lambda - \mu_0)\chi_{K_{\mu_0}}$ が成り立つ．ゆえに，$\nu_0 := \lambda - \mu_0$ は F_2 の固有値，したがって，A_2 の固有値であって，$\lambda = \mu_0 + \nu_0$ と書ける．よって，$\lambda \in S_r$．

(2.49) ($N = 2$ の場合) については，まず，

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A_1 \otimes A_2) \supset \left\{\lambda_1\lambda_2 \;\middle|\; \lambda_j \in \sigma_{\mathrm{p}}(A_j),\ j = 1, 2\right\}$$

は命題 2-7 (i) による．逆の包含関係を示すやり方は，(2.48) の場合と同様であるが，少し異なる点は，$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A_1 \otimes A_2)$ が 0 でない場合と 0 の場合を別々に考察する必要があるということである． □

次の例に必要な補題を採録する[34]．

補題 2-32　$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{K}$ の稠密な部分空間とする．T, S をそれぞれ，$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ 上の対称作用素で，S は $\mathscr{D}$ 上で本質的に自己共役であるとする．ユニタリ変換 $U : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{K}$ があって，次の条件がみたされているとしよう：

(i)　$\mathscr{D} \subset D(S)$, $U^{-1}\mathscr{D} \subset D(T)$.

(ii)　任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して，$UTU^{-1}\Psi = S\Psi$.

このとき，T は $U^{-1}\mathscr{D}$ 上で本質的に自己共役であり，作用素の等式 $U\bar{T}U^{-1} = \bar{S}$ が成り立つ．

例 2-2　$d \in \mathbb{N}$ とし，$L^2(\mathbb{R}^d)$ で働く，変数 x_j に関する一般化された偏微分作用素を D_j と記す：

$$D_j := \overline{\partial_j}.$$

ただし，$D(\partial_j) = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ($\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数で有界な台をもつものの全体),

---

[33] A_1 は自己共役であるから，異なる固有値に属する固有ベクトルの全体は直交系をなす．一方，可分なヒルベルト空間においては，非可算濃度の正規直交系は存在し得ない．実際，仮に，可分なヒルベルト空間において非可算濃度の正規直交系 $\{e_t\}_{t \in I}$ が存在したとすると (I は非可算集合)，$\{e_t\}_{t \in I}$ から生成される閉部分空間は可分でない (新井 (1997a) の 1 章，練習問題 16 (iv) の証明を参照)．したがって，矛盾が生じる．

[34] 証明については，新井 (1997a) の補題 5.7 を参照.

$$(\partial_j f)(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

このとき，$-iD_j$ は自己共役である[35)].

$n \geq 2$ とし，$\mathbb{R}^{dn} = (\mathbb{R}^d)^n$ の点を

$$x = (x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}), \quad x^{(\alpha)} = (x_1^{(\alpha)}, \cdots, x_d^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

のように表し，変数 $x_j^{(\alpha)}$ に関する一般化された偏微分作用素を $D_j^{(\alpha)}$ で表す．

各 $\alpha = 1, \cdots, n$ と $j = 1, \cdots, d$ に対して，$\overset{n}{\otimes} L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 $p_j^{(\alpha)}$ を

$$p_j^{(\alpha)} := I \otimes \cdots I \otimes \overset{\alpha\text{番目}}{\overbrace{(-iD_j)}} \otimes I \cdots \otimes I$$

によって定義する．

さて，例 1-5 における $\overset{n}{\otimes} L^2(\mathbb{R}^d)$ と $L^2(\mathbb{R}^{dn})$ の同型対応 (ユニタリ変換) を $U_{d,n}$ としよう ($U_{d,n} : \overset{n}{\otimes} L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{dn})$)．したがって，

$$U_{d,n} f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = f_1 \times \cdots \times f_n, \quad f_j \in L^2(\mathbb{R}^d),\ j = 1, \cdots, n.$$

任意の $f_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned} U_{d,n} p_j^{(\alpha)} f_1 \otimes \cdots \otimes f_n &= f_1 \times \cdots f_{\alpha-1} \times (-iD_j f_\alpha) \times f_{\alpha+1} \cdots \times f_n \\ &= -iD_j^{(\alpha)} (f_1 \times \cdots \times f_n). \end{aligned}$$

これから，

$$p_j^{(\alpha)} = U_{d,n}^{-1} (-iD_j^{(\alpha)}) U_{d,n} \quad (\overset{n}{\hat{\otimes}} C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ 上}).$$

系 2-27 (i) の応用により，$p_j^{(\alpha)}$ は $\overset{n}{\hat{\otimes}} C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役である．したがって，補題 2-32 を，$U = U_{d,n}^{-1}$ として応用することにより，$-iD_j^{(\alpha)}$ は $U_{\alpha,n} \overset{n}{\hat{\otimes}} C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的に自己共役であり，作用素の等式

$$U_{d,n} p_j^{(\alpha)} U_{d,n}^{-1} = -iD_j^{(\alpha)} \tag{2.50}$$

が成り立つことがわかる．

この等式からいろいろと有用な事実が導かれる．$P = P(\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(n)})$ を $\mathbb{R}^{dn}$ 上の実多項式とする．記法を簡潔にするために，

$$p^{(\alpha)} := (p_1^{(\alpha)}, \cdots, p_d^{(\alpha)}), \quad -iD^{(\alpha)} := (-iD_1^{(\alpha)}, \cdots, -iD_d^{(\alpha)}),$$

---

35) 新井 (1997a) の例 4.7 (pp.145～146) または新井-江沢 (1999b) の命題 3.18 (p.277) を参照.

とおく．(2.50) によって，

$$U_{d,n}P(p^{(1)},\cdots,p^{(n)})U_{d,n}^{-1}=P(-iD^{(1)},\cdots,-iD^{(n)})\quad (C_0^\infty(\mathbb{R}^{dn})\ \text{上}).$$

右辺は $C_0^\infty(\mathbb{R}^{dn})$ 上で本質的に自己共役である[36]．したがって，補題 2-32 により，作用素の等式

$$U_{d,n}\overline{P(p^{(1)},\cdots,p^{(n)})}U_{d,n}^{-1}=\overline{P(-iD^{(1)},\cdots,-iD^{(n)})}\tag{2.51}$$

が得られる．

量子力学における具体例として次のものがある．Δ を $L^2(\mathbb{R}^d)$ における一般化されたラプラシアンとする：

$$\Delta:=\sum_{j=1}^d D_j^2.$$

作用素 $-\Delta$ は非負自己共役である[37]．変数 $x^{(\alpha)}$ に関する一般化されたラプラシアンを Δ^α で表す．多項式 P が

$$P(\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(n)})=\sum_{j=1}^d\sum_{\alpha=1}^n(\lambda_j^{(\alpha)})^2$$

という形の場合を考えよう．この場合の (2.51) は，

$$U_{d,n}\sum_{\alpha=1}^n\left(I\otimes\cdots\otimes I\otimes\overset{\alpha\text{番目}}{\overbrace{(-\Delta)}}\otimes I\otimes\cdots\cdots\otimes I\right)U_{d,n}^{-1}=-\sum_{\alpha=1}^n\Delta^{(\alpha)}$$

を導く．

例 2-3　$\alpha=1,\cdots,n$ に対して，V_α を $\mathbb{R}^d$ 上の実数値ボレル可測関数でルベーグ測度に関して a.e. 有限であるとする．このとき，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の，V_α によるかけ算作用素 — これも V_α と記す — は自己共役である[38]．任意の $f_\alpha\in D(V_\alpha)$ に対して

$$U_{d,n}(V_1\otimes\cdots\otimes V_n)f_1\otimes\cdots\otimes f_n=(V_1\times\cdots\times V_n)f_1\times\cdots\times f_n$$

であることは $U_{d,n}$ の定義から容易にわかる．これは，任意の $\Psi\in\hat{\bigotimes}_{\alpha=1}^n D(V_\alpha)$ に対して，

$$(V_1\otimes\cdots\otimes V_n)\Psi=U_{d,n}^{-1}(V_1\times\cdots\times V_n)U_{d,n}\Psi$$

---

[36] 新井 (1997a) の定理 5.9 の応用.

[37] 新井 (1997a) の定理 5.11 を参照.

[38] 新井 (1997a) の例 2.33 を参照.

を意味する．系 2-27 (i) により，$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ は $\hat{\bigotimes}_{\alpha}^{n} D(V_\alpha)$ 上で本質的に自己共役である．この事実と補題 2-32 によって，$V_1 \times \cdots \times V_n$ は $U_{d,n}\left[\hat{\bigotimes}_{\alpha=1}^{n} D(V_\alpha)\right]$ 上で本質的に自己共役であり，作用素の等式

$$U_{d,n}V_1 \otimes \cdots \otimes V_n U_{d,n}^{-1} = V_1 \times \cdots \times V_n$$

が成り立つ．

特別な場合として，$V_\alpha(x^\alpha) = x_j^{(\alpha)}$ $(j = 1, \cdots, d)$ の場合を考え，

$$X_j^{(\alpha)} := I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overbrace{x_j^{(\alpha)}}^{\alpha\text{番目}} \otimes I \otimes \cdots\cdots \otimes I$$

とおけば，作用素の等式

$$U_{d,n} X_j^{(\alpha)} U_{d,n}^{-1} = x_j^{(\alpha)} \tag{2.52}$$

が得られる．ただし，

$$X^{(\alpha)} := (X_1^{(\alpha)}, \cdots, X_d^{(\alpha)})$$

であり，(2.52) の右辺は，$L^2(\mathbb{R}^{dn})$ における (関数 $x_j^{(\alpha)}$ による) かけ算作用素である．

いまの事実から，$L^2(\mathbb{R}^{dn})$ 上の一般のかけ算作用素が $\bigotimes^n L^2(\mathbb{R}^d)$ 上ではどのように働くかを明らかにすることができる．V を $\mathbb{R}^{dn}$ 上のボレル可測関数で $|V|$ がルベーグ測度に関して a.e. 有限であるものとしよう (実数値である必要はない)．作用素の組 $\{X_j^{(\alpha)} \mid \alpha = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, d\}$ は強可換であるから (補題 2-23 (ii) の応用[39])，作用素解析により，$\bigotimes^n L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 $V(X^{(1)}, \cdots, X^{(n)})$ が定義される．(2.52) とユニタリ変換に関わる作用素解析[40]により，

$$U_{d,n} V(X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}) U_{d,n}^{-1} = V(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$$

が成立することがわかる．

2-5 節　指数型作用素

---

[39] (2.52) からもわかる．なぜなら，作用素の組 $\{x_j^{\alpha}\}_{\alpha,j}$ は強可換だからである．

[40] 新井 (1997a) の 3 章，3.4 節，3.4.2 項，(3.33) 式を参照．この項の議論は，任意の有限個の強可換な自己共役作用素の場合へと容易に拡張される．

2-5-1　一般的側面

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，H を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素，E_H を H のスペクトル測度としよう．このとき，任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して，**指数型作用素**

$$e^{zH} := \int_{\mathbb{R}} e^{z\lambda}\, dE_H(\lambda) \tag{2.53}$$

が定義される．詳しく書けば，

$$D(e^{zH}) := \left\{ \Psi \in \mathscr{H} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |e^{z\lambda}|^2\, d\|E_H(\lambda)\Psi\|^2 < \infty \right\}, \tag{2.54a}$$

$$\langle \Phi, e^{zH}\Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{z\lambda}\, d\langle \Phi, E_H(\lambda)\Psi \rangle, \quad \Phi \in \mathscr{H}, \Psi \in D(e^{zH}). \tag{2.54b}$$

この作用素に関して，量子物理学との関連において特に重要なのは，$z = it$ $(t \in \mathbb{R})$ の場合 e^{itH} と $z = -t$ $(t \geq 0)$ の場合 e^{-tH} である．定理 2-14 (iv) によって，e^{itH} はユニタリ作用素である．他方，関数：$\lambda \longrightarrow e^{-t\lambda}$ $(t \in \mathbb{R})$ は実数値連続関数であるから，定理 2-14 (v) によって，e^{-tH} は自己共役作用素である．

H が下に有界ならば，任意の $t > 0$ に対して，e^{-tH} は有界であり，

$$\|e^{-tH}\| \leq e^{-t \inf \sigma(H)} \tag{2.55}$$

が成り立つ．実際，$\operatorname{supp} E_H = \sigma(H) \subset [\inf \sigma(H), \infty)$ であるから，任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{-t\lambda}|^2\, d\|E_H(\lambda)\Psi\|^2 = \int_{[\inf \sigma(H),\infty)} e^{-2t\lambda}\, d\|E_H(\lambda)\Psi\|^2$$
$$\leq e^{-2t \inf \sigma(H)} \|\Psi\|^2 < \infty.$$

これは $D(e^{-tH}) = \mathscr{H}$ かつ (2.55) を意味する． 作用素解析により，

$$e^{-(t+s)H} = e^{-tH}e^{-sH} = e^{-sH}e^{-tH}, \quad t, s \geq 0,$$

が成り立つ．さらに，作用素値関数：$t \longrightarrow e^{-tH}$ は強連続である．作用素の族 $\{e^{-tH}\}_{t\geq 0}$ は，量子物理学の文脈では，しばしば，H によって生成される**熱半群** (heat semi-group) とよばれる[41]．この場合，H をその**生成子** (generator) という．

なお，H が下に有界でない場合，$t > 0$ ならば，e^{-tH} は非有界になる．実際，いまの場合，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$E_H((-\infty, -n]) \neq 0$ であるから，$f_n \in \operatorname{Ran} E_H((-\infty, -n])$

---

[41] 一般にバナッハ空間上の有界線形作用素の族 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ が次の 3 つの条件をみたすとき，$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を (C_0) **半群**という：(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$ $(t, s \geq 0)$ (半群性)，(ii) $T(0) = I$，(iii) 対応：$t \longrightarrow T(t)$ は強連続．(C_0) 半群の理論については，たとえば，黒田 (1980) の 10 章，10.3 節を参照．

で $\|f_n\| = 1$ となるものがある ($E_H((-\infty, -n])f_n = f_n$)．作用素解析により，

$$\|e^{-tH} f_n\|^2 = \int_{(-\infty,-n]} e^{-2t\lambda}\, d\|E_H(\lambda) f_n\|^2 \geq e^{2tn}\|f_n\|^2 = e^{2tn}.$$

したがって，$\|e^{-tH} f_n\|^2 \longrightarrow \infty$ ($n \longrightarrow \infty$)．

2-5-2 自己共役作用素のテンソル積からつくられる指数型作用素

$A_1, \cdots, A_N$ をそれぞれ，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_1, \cdots, \mathscr{H}_N$ 上の自己共役作用素とする．系 2-27 (ii) によって，

$$S(A_1, \cdots, A_N) := \overline{\sum_{j=1}^{N} \tilde{A}_j} \tag{2.56}$$

は自己共役である．これが生成するユニタリ群 $\{e^{itS(A_1,\cdots,A_N)}\}_{t\in\mathbb{R}}$ あるいは自己共役作用素の族 $\{e^{-tS(A_1,\cdots,A_N)}\}_{t\geq 0}$ について調べる．

補題 2-33 $T_1, \cdots, T_N$ をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素で強可換であるとし，$E := E_{T_1} \times \cdots \times E_{T_N}$ とおく．

(i) 各 $J \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，

$$P(J) := E\left(\left\{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \in J\right\}\right)$$

とすれば，$\{P(J) \mid J \in \boldsymbol{B}^1\}$ は，自己共役作用素 $\overline{\sum_{j=1}^{N} T_j}$ のスペクトル測度である．

(ii) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{it\left(\overline{\sum_{j=1}^{N} T_j}\right)} = \prod_{j=1}^{N} e^{itT_j} := e^{itT_1} e^{itT_2} \cdots e^{itT_N}. \tag{2.57}$$

注意 2-9 今の場合，命題 2-16 によって，$e^{itT_j} e^{isT_k} = e^{isT_k} e^{itT_j}$ ($s, t \in \mathbb{R}$, $j, k = 1, \cdots, N$) であるから，(2.57) の右辺の作用素積の順序は任意でよい．

証明 (i) $L := \overline{\sum_{j=1}^{N} T_j}$ とおく．単位ベクトル $\Phi \in \mathscr{H}$ を任意に固定し，各 $B \in \mathbb{R}^N$ に対して，$\mu_\Phi(B) := \|E(B)\Phi\|^2$ とおく．このとき，$(\mathbb{R}^N, \boldsymbol{B}^N, \mu_\Phi)$ は確率測度空間である．$F(\lambda) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j$ ($\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$) とおけば，$F$ は確率測度空間 $(\mathbb{R}^N, \boldsymbol{B}^N, \mu_\Phi)$ 上の確率変数とみることができる．各 $J \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，

$\nu_\Phi(J) := \|P(J)\Phi\|^2$ とすれば，$\nu_\Phi(J) = \mu_\Phi\left(\{\lambda \in \mathbb{R}^N \mid F(\lambda) \in J\}\right)$ であるから，ν_Φ は $(\mathbb{R}, \boldsymbol{B}^1)$ の確率測度であり，ν_Φ は F の分布である[42]．したがって，$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，$\int_{\mathbb{R}^N} f(F(\lambda))\, d\mu_\Phi(\lambda)$ が存在するならば，

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(F(\lambda))\, d\mu_\Phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\nu_\Phi(x)$$

が成立する[43]．特に，$f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ とし，

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(\lambda)|^2\, d\mu_\Phi(\lambda) < \infty \tag{2.58}$$

となる Φ をとれば，

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\lambda)\, d\mu_\Phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} x\, d\nu_\Phi(x).$$

(2.58) の条件は，$\Phi \in D(L)$ であることに注意しよう．任意の $\Psi \in D(L) \setminus \{0\}$ に対して，$\Phi := \Psi/\|\Psi\|$ は単位ベクトルであり，$D(L)$ に属するから，このベクトルにいまの結果を適用すれば，

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\lambda)\, d\|E(\lambda)\Psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} x\, d\|P(x)\Psi\|^2$$

が得られる．これと偏極恒等式を用いると，任意の $\Psi, \Phi \in D(L)$ に対して，

$$\langle \Psi, L\Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} x\, d\langle \Psi, P(x)\Phi \rangle = \left\langle \Psi, \left(\int_{\mathbb{R}} x\, dP(x)\right)\Phi \right\rangle$$

を得る．これは，$\{P(J) \mid J \in \boldsymbol{B}^1\}$ が L のスペクトル測度であることを意味する．

(ii) 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\left\langle \Psi, \prod_{j=1}^N e^{itT_j}\Phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} e^{it\lambda_1}\, d\left\langle \Psi, E(\lambda) \prod_{j=2}^N e^{itT_j}\Phi \right\rangle.$$

作用素解析により，任意の $K \in \boldsymbol{B}^N$ に対して，

$$\left\langle \Psi, E(K) \prod_{j=2}^N e^{itT_j}\Phi \right\rangle = \int_K e^{it\left(\sum_{j=2}^N \lambda_j\right)}\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi \rangle$$

であることが N に関して帰納的に示される．したがって，

$$\prod_{j=1}^N e^{itT_j} = \int_{\mathbb{R}^N} e^{it\left(\sum_{j=1}^N \lambda_j\right)}\, dE(\lambda). \tag{2.59}$$

---

[42] 新井 (1997a) の付録 B, 定理 B.1.

[43] 新井 (1997a) の付録 B, 定理 B.2.

(i) の結果，$\mathbb{R}$ 上の任意の有界なボレル可測関数 f に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(F(\lambda))\,dE(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dP(x)$$

が成り立つ．特に，$f(x) = e^{itx}$ と選ぶと，

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{it\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j\right)}\,dE(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,dP(x).$$

この右辺は，(i) により，e^{itL} に等しい．これと (2.59) から (2.57) が得られる． □

定理 2-34

(i) すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{itS(A_1,\cdots,A_N)} = \prod_{j=1}^{N} e^{it\tilde{A}_j} \tag{2.60}$$

$$= \bigotimes_{j=1}^{N} e^{itA_j}. \tag{2.61}$$

(ii) 各 j に対して，定数 $c_j \in \mathbb{R}$ があって，$A_j \geq c_j$ ならば，すべての $t \geq 0$ に対して，

$$e^{-tS(A_1,\cdots,A_N)} = \prod_{j=1}^{N} e^{-t\tilde{A}_j}$$

$$= \bigotimes_{j=1}^{N} e^{-tA_j}.$$

証明 (i) 補題 2-33 を $T_j = \tilde{A}_j$ に応用すれば，(2.60) が得られる．

任意の $\Psi_j, \Phi_j \in \mathscr{H}_j$ に対して $\Psi = \bigotimes_{j=1}^{N} \Psi_j$, $\Phi = \bigotimes_{j=1}^{N} \Phi_j$ とおけば，

$$\begin{aligned}
\langle \Psi, e^{it\tilde{A}_j}\Phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{it\lambda_j}\, d\langle \Psi, E^{\otimes}_{A_1,\cdots,A_N}(\lambda)\Phi \rangle \\
&= \prod_{k \neq j} \langle \Psi_k, \Phi_k \rangle \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\langle \Psi_j, E_{A_j}(x)\Phi_j \rangle \\
&= \langle \Psi_j, e^{itA_j}\Phi_j \rangle \prod_{k \neq j} \langle \Psi_k, \Phi_k \rangle \\
&= \langle \Psi, B_j \Phi \rangle.
\end{aligned}$$

ここで，

$$B_j := I \otimes \cdots \otimes I \otimes \underbrace{e^{itA_j}}_{j\text{ 番目}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I.$$

これは，$e^{it\tilde{A}_j} = B_j$，すなわち，

$$e^{it\tilde{A}_j} = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overbrace{e^{itA_j}}^{j\text{ 番目}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I \tag{2.62}$$

を意味する．この事実と (2.7) により，(2.61) が得られる．

(ii) (i) の証明と同様. □

ノート

本章では，線形作用素のテンソル積のスペクトルに関しては，主に自己共役作用素のそれを詳しく解析した．この解析は基本的にはスペクトル定理の応用である．数学者の観点からは，当然，自己共役作用素以外のクラスに属する作用素のテンソル積のスペクトルの研究が次の課題になる．この方向の研究については，Reed and Simon (1978) の §XIII.9 および Ichinose (1970, 1972, 1975), Reed and Simon (1973) 等を参照されたい．

2 章演習問題

$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ はヒルベルト空間とする．

1. $A_j \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}), B_j \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ とする $(j = 1, \cdots, n)$．任意の α_j, $\beta_j \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j A_j\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j\right) = \sum_{j,k=1}^n \alpha_j \beta_k (A_j \otimes B_k)$$

を証明せよ．

2. $A_n \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}), B_n \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$, $\lim_{n\to\infty} A_n = A \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, $\lim_{n\to\infty} B_n = B \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ (作用素ノルムでの収束) ならば,

$$\lim_{n\to\infty} A_n \otimes B_n = A \otimes B,$$

$$\lim_{n\to\infty} (A_n \otimes I + I \otimes B_n) = A \otimes I + I \otimes B,$$

を証明せよ

3. $A \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ がともに正規作用素ならば，$A \otimes B$ も正規作用素であることを示せ[44]．

4. $A \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ がともに縮小作用素ならば，$A \otimes B$ も縮小作用素であることを

---

[44] ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の (有界とは限らない) 閉線形作用素 T が**正規** (normal) であるとは，$D(T)$ が稠密であり，$T^*T = TT^*$ が成り立つ場合をいう．新井-江沢 (1999a) の 2 章，2.9 節，2.9.1 項を参照.

示せ[45].

5. A, B をそれぞれ，$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ 上の自己共役作用素とする．$t \in \mathbb{R}$ に対して，$U(t) := e^{itA} \otimes e^{itB}$ とおく．

(i) $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ は強連続 1 パラメータユニタリ群であることを示せ[46].

(ii) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{itA} \otimes e^{itB}$ は $D(A) \hat{\otimes} D(B)$ を不変にすることを示せ.

(iii) (i), (ii) の事実を利用して，$A \otimes I + I \otimes B$ は $D(A) \hat{\otimes} D(B)$ 上で本質的に自己共役であることを示せ.

ヒント 新井 (1997a) の定理 4.6 を応用せよ.

6. Q, P を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素で，稠密な部分空間 $D \subset [D(QP) \cap D(PQ) \cap D(Q^2) \cap D(P^2)]$ があって，D 上で**正準交換関係** (canonical commutation relations)

$$[Q, P] = i$$

をみたすとする．$n \geq 2$ とし，$\overset{n}{\otimes} \mathscr{H}$ 上の作用素 Q_j, P_j $(j = 1, \cdots, n)$ を次のように定義する：

$$Q_j = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{j\text{ 番目}}{\overbrace{Q}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I,$$

$$P_j = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{j\text{ 番目}}{\overbrace{P}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I.$$

このとき，$\{Q_j, P_j\}_{j=1}^n$ は，$\overset{n}{\hat{\otimes}} D$ 上で，n 自由度の正準交換関係

$$[Q_j, P_k] = i\delta_{jk}, \quad [Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j, P_k] = 0,$$

をみたすことを示せ.

7. Q, P を前問のものとし，Γ_1, Γ_2 を $\mathscr{K}$ 上の有界自己共役作用素で反交換関係

$$\Gamma_j \Gamma_k + \Gamma_k \Gamma_j = \kappa \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2$$

をみたすとする．ここで，κ は定数である．$\Gamma_3 := i\Gamma_1\Gamma_2$ とおく．

(i) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，$S := P \otimes \Gamma_1 + \lambda Q \otimes \Gamma_2$ は対称作用素であることを示せ.

(ii) Γ_3 は有界自己共役作用素であることを示せ．また，$\Gamma_3^2 = \kappa^2/4$ を示せ.

(iii) $D \hat{\otimes} \mathscr{K}$ 上で，

$$S^2 = \frac{\kappa}{2}\left(P^2 + \lambda^2 Q^2\right) \otimes I - \lambda(I \otimes \Gamma_3)$$

が成立することを示せ.

---

[45] ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への線形作用素 T は，$D(T) = \mathscr{H}$, $\|T\| \leq 1$ をみたすとき，**縮小作用素** (contraction operator) とよばれる.

[46] 強連続 1 パラメータユニタリ群については，新井 (1997a) の 4 章，4.3 節，4.3.3 項 (pp. 142〜143) を参照.

8. A_1, A_2 を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素で可換であるとする．また，B_1, B_2 を $\mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素で反可換であるとする (i.e., $D(B_1B_2) \cap D(B_2B_1)$ 上で $B_1B_2 = -B_2B_1$ が成立).

(i)　$A_1 \otimes B_1$ と $A_2 \otimes B_2$ は $[D(A_1A_2) \cap D(A_2A_1)] \hat{\otimes} [D(B_1B_2) \cap D(B_2B_1)]$ 上で反可換であることを示せ.

(ii)　$T = A_1 \otimes B_1 + A_2 \otimes B_2$ とおく．任意の $\Psi \in [D(A_1A_2) \cap D(A_2A_1) \cap D(A_1^2) \cap D(A_2^2)] \hat{\otimes} [D(B_1B_2) \cap D(B_2B_1) \cap D(B_1^2) \cap D(B_2^2)]$ に対して，$\Psi \in D(T^2)$ であり，

$$T^2\Psi = (A_1^2 \otimes B_1^2 + A_2^2 \otimes B_2^2)\Psi$$

が成立することを示せ.

注意　この問題において，A_j, B_j が自己共役作用素である場合には，可換性や反可換性を強い意味で考えることにより (強可換性，強反可換性)，有用な (非自明な) 結果を得ることができる (Arai (1993c, 1995a)).

第 3 章

全フォック空間と第2量子化作用素

ヒルベルト空間の n 重テンソル積 $(n = 1, 2, \cdots)$ からつくられる無限直和ヒルベルト空間 — 全フォック空間 — がこの章の主題である．このヒルベルト空間上で働く基本的作用素の 1 つとして，第 2 量子化作用素とよばれる作用素の性質を調べる．全フォック空間の理論は場の量子論を数学的に構成する上での基礎となるものである．

この章から，本書の主題の 1 つであるフォック空間の理論を展開する．この理論は，ある型の無限直和ヒルベルト空間上の線形作用素論である．それゆえ，フォック空間の理論を数学的に見通しよく認識するには，まず，無限直和ヒルベルト空間とその上で働く線形作用素の一般論を展開しておくのがよい．こうすることにより，何がフォック空間特有の事柄なのかを明断につかむことが可能になる．そこで，フォック空間の理論に入る前に無限直和ヒルベルト空間の理論の基礎的な部分を論述する．

3-1 節　無限直和ヒルベルト空間上の線形作用素

ヒルベルト空間の列 $\{\mathscr{H}_n\}_{n=0}^\infty$ があたえられたとしよう．このとき，ベクトル列 $\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^\infty$ $(\Psi^{(n)} \in \mathscr{H}_n,\, n \geq 0)$ で，条件 $\sum_{n=0}^\infty \|\Psi^{(n)}\|_{\mathscr{H}_n}^2 < \infty$ をみたすものの全体を $\bigoplus_{n=0}^\infty \mathscr{H}_n$ とする：

$$\bigoplus_{n=0}^\infty \mathscr{H}_n := \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^\infty \;\middle|\; \Psi^{(n)} \in \mathscr{H}_n,\ n \geq 0, \sum_{n=0}^\infty \|\Psi^{(n)}\|_{\mathscr{H}_n}^2 < \infty \right\}. \tag{3.1a}$$

この集合は,

$$\Psi + \Phi := \{\Psi^{(n)} + \Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}, \quad \alpha\Psi := \{\alpha\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$$

($\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}, \Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}, \alpha \in \mathbb{C}$) によって定義される加法 $\Psi+\Phi$ とスカラー乗法 $\alpha\Psi$ に関してベクトル空間になる．この場合，零ベクトルは $0 = \{0_{\mathscr{H}_n}\}_{n=0}^{\infty}$ ($0_{\mathscr{H}_n}$ は $\mathscr{H}_n$ の零ベクトルを表す) であり，$\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ の逆ベクトル $-\Psi$ は $\{-\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ である．さらに，任意の $\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}, \Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ に対して,

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Psi^{(n)}, \Phi^{(n)} \rangle_{\mathscr{H}_n} \tag{3.1b}$$

とすれば，これは $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ の内積であり，$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ はこの内積に関してヒルベルト空間になる[1)]．ヒルベルト空間としての $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ を $\mathscr{H}_1, \cdots, \mathscr{H}_n, \cdots$ の**無限直和ヒルベルト空間**あるいは単に**無限直和** (infinite direct sum) という．

任意の $m \geq 0$ と $\psi \in \mathscr{H}_m$ に対して，$\tilde{\psi} \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ を $\tilde{\psi}^{(m)} := \psi$, $n \neq m$ のとき $\tilde{\psi}^{(n)} := 0$ によって定義すれば，対応 $\psi \longrightarrow \tilde{\psi}$ は $\mathscr{H}_m$ の $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ への等長的な埋め込みをあたえる ($\|\tilde{\psi}\| = \|\psi\|$)．言い換えれば，$\mathscr{H}_m$ は $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ の閉部分空間

$$\left\{ \{0, \cdots, 0, \overset{m}{\overbrace{\psi}}, 0, 0, \cdots\} \;\middle|\; \psi \in \mathscr{H}_m \right\}$$

とユニタリ同値である．この意味で，$\mathscr{H}_m$ の各元 ψ は $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ の元とみなすことができる．本書では，しばしば，この同一視を用い，誤解の生じるおそれのない限り，$\tilde{\psi}$ も単に ψ と記すことにする．この自然な同一視によれば，ベクトル $\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ は $\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^{(n)}$ とも書かれる．

注意 3-1 有限個の $\mathscr{H}_n$ のみ — たとえば，$\mathscr{H}_{i_1}, \cdots, \mathscr{H}_{i_m}$ ($m < \infty$, $i_1 < \cdots < i_m$) — が零ベクトル空間 $\{0\}$ と異なる場合には，$\{\mathscr{H}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は，ヒルベルト空間として，有限直和 $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathscr{H}_{i_j}$ に同型である．したがって，以下で展開する無限直和の理論は有限直和の場合も含む．また，真に無限直和と言えるのは，無限に多くの $\mathscr{H}_n$ が零ベクトル空間 $\{0\}$ と異なる場合である．

---

1) 新井 (1997a) の pp.29〜30 を参照.

各 n に対して，$\mathscr{D}_n$ が $\mathscr{H}_n$ の部分空間であるとき，

$$\hat{\bigoplus_{n=0}^{\infty}} \mathscr{D}_n := \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n \;\middle|\; \Psi^{(n)} \in \mathscr{D}_n,\ n \geq 0, \right.$$
$$\left. \text{ある番号 } n_0 \text{ があって，} n \geq n_0 \text{ ならば } \Psi^{(n)} = 0 \right\} \tag{3.2}$$

は $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ の部分空間になる (条件にいう番号 n_0 は Ψ に依存しうる)．これを $\{\mathscr{D}_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**代数的無限直和** (algebraic infinite direct sum) あるいは**不完全無限直和** (incompleted infinite direct sum) とよぶ (問題 1 を参照)．

注意 3-2 有限個の $\mathscr{D}_n$ のみ — たとえば，$\mathscr{D}_{i_1}, \cdots, \mathscr{D}_{i_m}$ ($m < \infty$, $i_1 < \cdots < i_m$) — が零ベクトル空間 $\{0\}$ と異なる場合には，$\hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$ は，ベクトル空間として，有限直和 $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathscr{D}_{i_j}$ に同型である．したがって，代数的無限直和についても，無限個の $\mathscr{D}_n$ が零ベクトル空間と異なる場合のみ，"無限" という言葉が実質的な意味をもつ．

命題 3-1

(i) 各 $\mathscr{D}_n$ が $\mathscr{H}_n$ で稠密ならば，$\hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$ は $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ で稠密である．

(ii) $\{e_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ が $\mathscr{H}_n$ の CONS ならば，$\{e_j^{(n)} \mid j \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$ は，$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ の CONS である．

証明 (i) 任意の $\Psi \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ に対して，$\Psi_N \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ を $\Psi_N^{(n)} = 0$ ($n \geq N + 1$), $\Psi_N^{(n)} = \Psi^{(n)}$ ($n \leq N$) によって定義すれば，

$$\|\Psi_N - \Psi\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\Psi^{(n)}\|_{\mathscr{H}_n}^2 \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty.$$

したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 N_0 があって，$N \geq N_0$ ならば，$\|\Psi_N - \Psi\| < \varepsilon/2$．今，各 $\mathscr{D}_n$ が $\mathscr{H}_n$ で稠密であるから，各 n に対して，$\Psi_m^{(n)} \longrightarrow \Psi^{(n)}$ ($m \longrightarrow \infty$) となる $\Psi_m^{(n)} \in \mathscr{D}_n$ がある．そこで，$\Psi_{m,N} = \{\Psi_m^{(0)}, \cdots, \Psi_m^{(N)}, 0, 0, \cdots\}$ とおけば，$\Psi_{m,N} \in \hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$ であり，$\|\Psi_{m,N} - \Psi_N\| \longrightarrow 0$ ($m \longrightarrow \infty$) であることがわかる．特に，$N = N_0$ の場合を考え，$\Psi_{m,N_0} = \Phi_m$ とおけば，番号 m_0 があって，$m \geq m_0$ ならば，$\|\Phi_m - \Psi_{N_0}\| < \varepsilon/2$．これとすぐ上の不等式によって，$m \geq m_0$ ならば $\|\Phi_m - \Psi\| \leq \|\Phi_m - \Psi_{N_0}\| + \|\Psi_{N_0} - \Psi\| < \varepsilon$．したがって，$\Phi_m \longrightarrow \Psi$ ($m \longrightarrow \infty$)．これは $\hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$ の $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ における稠密性を意味する．

(ii) 集合 $S := \{e_j^{(n)} \mid j \in \mathbb{N},\, n \geq 0\}$ が $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ の正規直交系であることは容易にわかる．$\{e_j^{(n)}\}_{j=0}^{\infty}$ によって生成される，$\mathscr{H}_n$ の部分空間 $F_n := \mathscr{L}\{e_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ は $\mathscr{H}_n$ で稠密である．したがって，(i) により，$\hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} F_n = \mathscr{L}(S)$ は $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n$ で稠密である．したがって，S は完全である．□

$\mathscr{K}_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ をヒルベルト空間，A_n を $\mathscr{H}_n$ から $\mathscr{K}_n$ への線形作用素とする．以下，この節を通して，

$$\mathfrak{H} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_n, \quad \mathfrak{K} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{K}_n,$$

とおき，$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{K}$ への作用素 A を次のように定義する：

$$D(A) := \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{H} \;\middle|\; \Psi^{(n)} \in D(A_n),\, n \geq 0,\, \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n \Psi^{(n)}\|_{\mathscr{K}_n}^2 < \infty \right\},$$

$$(A\Psi)^{(n)} := A_n \Psi^{(n)}, \quad \Psi \in D(A),\ n \geq 0.$$

こうして定義される作用素 A を A_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の**無限直和**あるいは単に**直和**とよび，

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.3}$$

と記す．

注意 3-3　有限直和ヒルベルト空間 $\bigoplus_{n=0}^{N} \mathscr{H}_j$ から $\bigoplus_{n=0}^{N} \mathscr{K}_j$ への直和作用素 $\bigoplus_{j=0}^{N} A_n$ も同様に定義される：

$$D\left(\bigoplus_{n=0}^{N} A_n\right) := \bigoplus_{n=0}^{N} D(A_n),$$

$$\left(\bigoplus_{n=0}^{N} A_n\right)\Psi := (A_0\Psi^{(0)}, A_1\Psi^{(1)}, \cdots, A_N\Psi^{(N)}), \quad \Psi \in D\left(\bigoplus_{n=0}^{N} A_n\right).$$

もちろん，有限直和作用素の方が無限直和作用素よりも扱いが簡単である．以下の論述を有限直和作用素の場合に“翻訳する”のは容易であるので，無限直和作用素について述べられる事実が有限直和作用素の場合にどういう形をとるかについてはいちいち注意しない．

次の命題は無限直和作用素 A の有界性についての基本的な事実である．

命題 3-2　$A_n \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_n, \mathscr{K}_n)$ $(n \geq 0)$ とする．このとき，$A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ であるため

の必要十分条件は，

$$\sup_{n\geq 0}\|A_n\| < \infty$$

となることである．この場合，

$$\|A\| = \sup_{n\geq 0}\|A_n\| \tag{3.4}$$

が成り立つ．

証明　$C_A := \sup_{n\geq 0}\|A_n\|$ とおく．

(必要性) $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H},\mathfrak{K})$ とする．このとき，任意の $\Psi \in \mathfrak{H}$ に対して，$\|A\Psi\| \leq \|A\|\|\Psi\|$ であるから，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|A_n\Psi^{(n)}\|^2 \leq \|A\|^2\|\Psi\|^2.$$

特に，Ψ として，$\Psi^{(n)}$ のみが 0 でないものをとれば，$\|A_n\Psi^{(n)}\| \leq \|A\|\|\Psi^{(n)}\|$ を得る．これは，$\|A_n\| \leq \|A\|$ を意味するから，

$$C_A \leq \|A\| < \infty. \tag{$*$}$$

(十分性) $C_A < \infty$ とする．このとき，任意の $\Psi \in \mathfrak{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\|A_n\Psi^{(n)}\|^2 &\leq C_A^2\sum_{n=0}^{\infty}\|\Psi^{(n)}\|^2\\ &= C_A^2\|\Psi\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

これは，$D(A) = \mathfrak{H}$ かつ A は有界で $\|A\Psi\| \leq C_A\|\Psi\|$ を意味する．特に，

$$\|A\| \leq C_A. \tag{$**$}$$

($*$) と ($**$) より，(3.4) を得る．□

注意 3-4　命題 3-2 から，すべての A_n が有界であっても，もし，$\sup_{n\geq 0}\|A_n\| = \infty$ ならば，A は非有界であることがわかる．

無限直和作用素 A の非有界性に関する次の事実も基本的である．

命題 3-3　作用素 A_n $(n = 0, 1, \cdots)$ のうち少なくとも 1 つが有界でないならば，A は有界でない．

証明　ある番号 k に対して，A_k が有界でないとしよう．このとき，ベクトル列 $\{\psi_N\}_{N=1}^{\infty} \subset D(A_k)$ で，$\|\psi_N\| = 1, \|A_k\psi_N\| \longrightarrow \infty$ $(N \longrightarrow \infty)$ をみたすものが存在する．そこで，$\mathfrak{H}$ のベクトル Ψ_N を $\Psi_N^{(k)} = \psi_N, \Psi_N^{(n)} = 0$ $(n \neq k)$ によって定義すれば，$\Psi_N \in D(A), \|\Psi_N\| = 1$ であり，$\|A\Psi_N\| = \|A_k\psi_N\| \longrightarrow \infty$ $(N \longrightarrow \infty)$．したがって，$A$ は有界でない．　□

次の命題は，無限直和作用素の強連続性に関するものである．

命題 3-4　$A_{n,N}, A_n \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_n, \mathscr{K}_n)$ $(n \geq 0, N \in \mathbb{N})$

$$\text{s-}\lim_{N\to\infty} A_{n,N} = A_n, \quad n \geq 0,$$

$$\sup_{n\geq 0} \|A_n\| < \infty, \qquad \sup_{n\geq 0, N\in\mathbb{N}} \|A_{n,N}\| < \infty,$$

とする[2)]．$A(N) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{n,N}$ とおく．このとき，$A(N), A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ であり，

$$\text{s-}\lim_{N\to\infty} A(N) = A$$

が成り立つ

証明　$A(N), A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ は命題 3-2 による．任意の $\Psi \in \mathfrak{H}$ に対して

$$\|A(N)\Psi - A\Psi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|A_{n,N}\Psi^{(n)} - A_n\Psi^{(n)}\|^2.$$

仮定から，すべての $n \geq 0$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \|A_{n,N}\Psi^{(n)} - A_n\Psi^{(n)}\|^2 = 0$$

であり，$C := \sup_{n\geq 0} \|A_n\|, D := \sup_{n\geq 0, N\in\mathbb{N}} \|A_{n,N}\|$ とおけば，

$$\begin{aligned}\|A_{n,N}\Psi^{(n)} - A_n\Psi^{(n)}\|^2 &\leq 2(\|A_{n,N}\Psi^{(n)}\|^2 + \|A_n\Psi^{(n)}\|^2) \\ &\leq 2(D^2 + C^2)\|\Psi^{(n)}\|^2.\end{aligned}$$

したがって，優級数定理により，

$$\lim_{N\to\infty} \|A(N)\Psi - A\Psi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \|A_{n,N}\Psi^{(n)} - A_n\Psi^{(n)}\|^2 = 0.$$

ゆえに求める結果を得る．　□

---

2)「s-lim」は強極限を表す．すなわち，$S_N, S \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ ($\mathscr{H}, \mathscr{K}$ はヒルベルト空間) とするとき，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} S_N = S \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\psi \in \mathscr{H}$ に対して，$\lim_{N\to\infty} \|S_N\psi - S\psi\|_{\mathscr{K}} = 0$.

各 A_n の性質の，A への "遺伝" に関する基本的事実をまとめておく (自己共役性については，別個に論じる).

命題 3-5

(i) 各 $D(A_n)$ $(n \geq 0)$ が稠密ならば，$D(A)$ は稠密である．さらに，

$$A^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n^*.$$

(ii) 各 A_n が閉ならば，A は閉作用素である．さらに，加えて，$\mathscr{H}_n = \mathscr{K}_n$ $(n \geq 0)$ ならば，スペクトルについて[3]，

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(A_n)} \subset \sigma(A), \tag{3.5}$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_{\mathrm{p}}(A_n) = \sigma_{\mathrm{p}}(A), \tag{3.6}$$

が成り立つ．

(iii) 各 $n = 0, 1, \cdots$ に対して，A_n は閉であるとし，$D_n \subset \mathscr{H}_n$ を A_n の芯とすれば，$\hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} D_n$ は A の芯である[4]．

(iv) $\mathscr{H}_n = \mathscr{K}_n$ $(n \geq 0)$ の場合を考える．このとき，各 A_n が対称作用素ならば，A も対称作用素である．さらに，$A_n \geq 0$ $(n \geq 0)$ ならば，$A \geq 0$ である．

(v) すべての A_n $(n \geq 0)$ がユニタリならば，A はユニタリである．

(vi) 各 A_n $(n \geq 0)$ が縮小作用素ならば，A は縮小作用素である[5]．

(vii) $\mathscr{H}_n = \mathscr{K}_n$ $(n \geq 0)$ の場合を考える．このとき，各 A_n $(n \geq 0)$ が正射影作用素ならば，A も正射影作用素であり，$\mathrm{Ran}\,(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ran}\,(A_n)$．

証明 (i) $D(A)$ の稠密性は，$D(A) \supset \hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} D(A_n)$ であることと命題 3-1 (i) による．任意の $\Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in D\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n{}^*\right)$ と $\Psi \in D(A)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle \Phi, A\Psi \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Phi^{(n)}, A_n \Psi^{(n)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle A_n{}^* \Phi^{(n)}, \Psi^{(n)} \rangle \\ &= \left\langle \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n{}^* \right) \Phi, \Psi \right\rangle.\end{aligned}$$

---

[3] 線形作用素のスペクトルは，1 つのヒルベルト空間上の線形作用素に対して定義される．2 章，2-2 節，2-2-1 項を参照.

[4] 作用素の芯については，2 章，注意 2-1 (i) を参照.

[5] 縮小作用素の定義については，2 章演習問題 4 に対する脚注を参照.

これは，$\Phi \in D(A^*)$ かつ $A^*\Phi = \left(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} A_n{}^*\right)\Phi$ を意味する．したがって，$\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} A_n{}^* \subset A^*$.

逆に，$\Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in D(A^*)$ とし，$\Xi = A^*\Phi$ とおけば，任意の $\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in D(A)$ に対して，$\langle \Xi, \Psi\rangle = \langle \Phi, A\Psi\rangle$．したがって，$\Psi$ として，第 n 成分以外は 0 のベクトルをとれば，$\langle \Xi^{(n)}, \Psi^{(n)}\rangle = \langle \Phi^{(n)}, A_n\Psi^{(n)}\rangle$．$\Psi^{(n)}$ は $D(A_n)$ の任意のベクトルだから，この式は，$\Phi^{(n)} \in D(A_n^*)$ かつ $A_n^*\Phi^{(n)} = \Xi^{(n)}$ を意味する．したがって $\sum_{n=0}^{\infty} \| A_n^*\Phi^{(n)} \|^2 = \| \Xi \|^2 < \infty$．ゆえに，$\Phi \in D\left(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} A_n^*\right)$．したがって，$D(A^*) \subset D\left(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} A_n^*\right)$.

以上から，$D(A^*) = D\left(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} A_n^*\right)$ であり，題意が成立する．

(ii) $N \in \mathbb{N}, \Psi_N = \{\Psi_N^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in D(A), \Psi_N \longrightarrow \Psi \in \mathfrak{H}, A\Psi_N \longrightarrow \Phi \in \mathfrak{K}$ $(N \longrightarrow \infty)$ とする．したがって，各 n に対して，$\Psi_N^{(n)} \longrightarrow \Psi^{(n)}$, $A_n\Psi_N^{(n)} \longrightarrow \Phi^{(n)}$ $(N \longrightarrow \infty)$．$A_n$ は閉であるから，$\Psi^{(n)} \in D(A_n)$ かつ $A_n\Psi^{(n)} = \Phi^{(n)}$．したがって，$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\Psi^{(n)}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi^{(n)}\|^2 = \|\Phi\|^2 < \infty$．以上から，$\Psi \in D(A)$ であり，$A\Psi = \Phi$．ゆえに，A は閉である．

(3.5) を示すには，$\sigma(A)$ は閉集合であるから，$\varrho(A) \subset \overset{\infty}{\underset{n=0}{\cap}} \varrho(A_n)$ を示せばよい．そこで，$z \in \varrho(A)$ としよう．A は閉であるから，$A - z$ は全単射であり，$(A - z)^{-1}$ は有界である．この事実から，任意の $n \geq 0$ に対して，$A_n - z$ が全単射であることを導く．このために，まず，$\psi \in \ker(A_n - z)$ とする．このとき，ベクトル $\Psi \in \mathfrak{H}$ を $\Psi^{(n)} := \psi, \Psi^{(m)} := 0$ $(m \neq n)$ によって定義すれば，$\Psi \in D(A)$ であり，$(A - z)\Psi = 0$．したがって，$\Psi = 0$．ゆえに，$\psi = 0$．よって，A_n は単射である．また，任意の $\phi \in \mathscr{H}_n$ に対して，ベクトル $\Phi \in \mathfrak{H}$ を $\Phi^{(n)} := \phi, \Phi^{(m)} := 0$ $(m \neq n)$ によって定義し，$\Psi = (A - z)^{-1}\Phi$ とおけば，$\Psi \in D(A)$，$(A_n - z)\Psi^{(n)} = \phi$．したがって，$A_n - z$ は全射である．これらの結果と A_n の閉性により，$z \in \varrho(A_n)$ である．n は任意であったから，$z \in \overset{\infty}{\underset{n=0}{\cap}} \varrho(A_n)$.

ある n に対して，$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A_n)$ ならば，$A_n\psi_n = \lambda\psi_n$ をみたす $\psi_n \in D(A_n)$ $(\psi_n \neq 0)$ がある．そこで，$\Psi \in \mathfrak{H}$ を，$\Psi^{(n)} := \psi_n$，$m \neq n$ ならば $\Psi^{(m)} := 0$ と定義すれば，$\Psi \in D(A)$ であり，$A\Psi = \lambda\Psi$ $(\Psi \neq 0)$ が成り立つ．したがって，$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$．ゆえに，$\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} \sigma_{\mathrm{p}}(A_n) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A)$．逆の包含関係を示すために，$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ とすれば，$\Psi =$

$\{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in D(A)$ $(\Psi \neq 0)$ があって，$A\Psi = \lambda\Psi$．これは，$A_n\Psi^{(n)} = \lambda\Psi^{(n)}$ $(n \geq 0)$ を意味する．$\Psi \neq 0$ より，$\Psi^{(n)} \neq 0$ となる n がある．この n に対して，$\lambda \in \sigma_{\rm p}(A_n)$ となる．したがって，$\lambda \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_{\rm p}(A_n)$．ゆえに，$\sigma_{\rm p}(A) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_{\rm p}(A_n)$．

(iii) 任意の $\Psi \in D(A)$ と自然数 N に対して，$\Psi_N = \{\Psi^{(0)}, \cdots, \Psi^{(N)}, 0, 0, \cdots\}$ とすれば，$\Psi_N \longrightarrow \Psi$, $A\Psi_N \longrightarrow A\Psi$ $(N \longrightarrow \infty)$．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 N_0 があって，$N \geq N_0$ ならば，$\|\Psi_N - \Psi\| < \varepsilon$, $\|A\Psi_N - A\Psi\| < \varepsilon$．$D_n$ に対する仮定により，各 $n = 0, 1, \cdots, N$ に対して，

$$\|\Phi^{(n)} - \Psi^{(n)}\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{N+1}, \quad \|A_n\Phi^{(n)} - A_n\Psi^{(n)}\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{N+1}$$

をみたす $\Phi^{(n)} \in D_n$ がとれる．そこで，$\Phi_N = \{\Phi^{(0)}, \cdots, \Phi^{(N)}, 0, 0, \cdots\}$ とおけば，$\Phi_N \in \hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} D_n$ であり，$\|\Phi_N - \Psi_N\| < \varepsilon$, $\|A\Phi_N - A\Psi_N\| < \varepsilon$．したがって，$N \geq N_0$ ならば，三角不等式により，$\|\Phi_N - \Psi\| < 2\varepsilon$, $\|A\Phi_N - A\Psi\| < 2\varepsilon$．これは，$\Phi_N \longrightarrow \Psi$, $A\Phi_N \longrightarrow A\Psi$ $(N \longrightarrow \infty)$ を意味する．ゆえに，題意が成立する．

(iv) いまの場合，各 $D(A_n)$ は稠密であるから，(i) により，$D(A)$ は稠密である．任意の $\Psi \in D(A)$ に対して，

$$\langle \Psi, A\Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Psi^{(n)}, A_n\Psi^{(n)} \rangle.$$

A_n の対称性により，$\langle \Psi^{(n)}, A_n\Psi^{(n)} \rangle$ は実数である．したがって，$\langle \Psi, A\Psi \rangle$ も実数である．したがって，A は対称作用素である[6)]．また，$\langle \Psi^{(n)}, A_n\Psi^{(n)} \rangle \geq 0$ ならば，$\langle \Psi, A\Psi \rangle \geq 0$ であるから，A の非負性に関する事実が証明される．

(v) 各 A_n はユニタリであるとする．このとき，A の等長性は容易にわかる．任意の $\Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{K}$ に対して，$A_n\Psi^{(n)} = \Phi^{(n)}$ となる $\Psi^{(n)} \in \mathscr{H}_n$ が存在する．このとき，$\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ とすれば，A_n の等長性により，$\Psi \in \mathfrak{H}$ であり，A の定義により，$A\Psi = \Phi$ である．したがって，A は全射である．以上から，A はユニタリである．

(vi) 各 A_n が縮小作用素ならば，$\sup_{n \geq 0} \|A_n\| \leq 1$ であるから，命題 3-2 により，$\|A\| \leq 1$．

(vii) いまの場合，$\|A_n\| \leq 1$ であるから，(vi) によって，A は有界であり，$\|A\| \leq 1$．A_n の自己共役性と (iv) によって，A は自己共役である．また，$A^2 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} {A_n}^2 =$

---

6) 新井 (1997a) の 2 章，2.10 節，2.10.1 項 (p.95) を参照．A_n の対称性から，$A \subset \bigoplus_{n=0}^{\infty} {A_n}^*$ を示し，(i) を用いて，$A \subset A^*$ を示してもよい．

$\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} A_n = A$. したがって，$A$ は正射影作用素である．$\mathrm{Ran}\,(A) \subset \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} \mathrm{Ran}\,(A_n)$ は自明．逆に，$\Psi \in \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} \mathrm{Ran}\,(A_n)$ とすれば，各 n に対して，$\Psi^{(n)} = A_n\Phi^{(n)}$ となる $\Phi^{(n)} \in \mathscr{H}_n$ がある．$A_n{}^2 = A_n$ より，$A_n\Psi^{(n)} = \Psi^{(n)}$．したがって，$A\Psi = \Psi$．ゆえに，$\Psi \in \mathrm{Ran}\,(A)$. □

各 n について，$\mathscr{H}_n = \mathscr{K}_n$ であり，A_n が自己共役の場合について成立する事実を証明するために，補題を 1 つ用意する．

補題 3-6　各 n に対して，$\{E^{(n)}(B) \,|\, B \in \boldsymbol{B}^d\}$ を，$\mathscr{H}_n$ で作用する，d 次元のスペクトル測度とし ($d \in \mathbb{N}$)，$\mathfrak{H}$ 上の作用素 $E(B)$ ($B \in \boldsymbol{B}^d$) を

$$E(B) := \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} E^{(n)}(B)$$

によって定義する．このとき，次の (i), (ii) が成立する．

(i)　$\{E(B) \,|\, B \in \boldsymbol{B}^d\}$ は d 次元のスペクトル測度である．

(ii)　f を $\mathbb{R}^d$ 上の任意のボレル可測関数，$\Psi \in \mathfrak{H}$ とする．このとき，

$$C_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle < \infty \tag{3.7}$$

であるための必要十分条件は

$$C_2 := \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|\, d\langle \Psi^{(n)}, E^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)}\rangle < \infty \tag{3.8}$$

であり，この場合，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|\, d\langle \Psi^{(n)}, E^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)}\rangle \tag{3.9}$$

が成り立つ．

証明　(i) 命題 3-5 (vii) により，$E(B)$ は正射影作用素である．$E(\varnothing) = 0$, $E(\mathbb{R}^d) = I$ は容易にわかる．$B_j \in \boldsymbol{B}^d$ ($B_j \cap B_k = \varnothing$), $C = \overset{\infty}{\underset{j=1}{\cup}} B_j$ ($C_N := \overset{N}{\underset{j=1}{\cup}} B_j$) とおく．このとき，$\text{s-}\lim_{N\to\infty} E^{(n)}(C_N) = E^{(n)}(C)$．$\|E^{(n)}(C_N)\| \le 1$, $\|E^{(n)}(C)\| \le 1$ であるから，命題 3-4 により，$\text{s-}\lim_{N\to\infty} E(C_N) = E(C)$．他方，$E(C_N) = \sum_{j=1}^{N} E(B_j)$ であるから，$E(C) = \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} E(B_j)$．したがって，$\{E(B) \,|\, B \in \boldsymbol{B}^1\}$ は d 次元のスペクトル測度である．

(ii) (必要性) (3.7) を仮定する．任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\Psi_N := \{\Psi^{(1)}, \cdots, \Psi^{(N)}, 0, 0, \cdots\}$$

とおけば，

$$\sum_{n=0}^{N} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)| \, d\langle \Psi^{(n)}, E^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)}\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)| \, d\langle \Psi_N, E(\lambda)\Psi_N\rangle$$

$$\leq C_1 < \infty. \tag{3.10}$$

ここで，最後の不等式を得るのに，容易にわかる事実：

$$\langle \Psi_N, E(B)\Psi_N\rangle \leq \langle \Psi, E(B)\Psi\rangle, \quad B \in \boldsymbol{B}^d,$$

を用いた．したがって，$N \longrightarrow \infty$ として，

$$C_2 \leq C_1. \tag{$*$}$$

ゆえに (3.8) を得る．

(十分性) (3.8) を仮定する．このとき，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，(3.10) の左辺は C_2 以下であるから，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)| \, d\langle \Psi_N, E(\lambda)\Psi_N\rangle \leq C_2.$$

左辺は，N について単調非減少であるから，

$$C_1' := \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)| \, d\langle \Psi_N, E(\lambda)\Psi_N\rangle$$

は存在して，

$$C_1' \leq C_2. \tag{$**$}$$

定数 C_1' を下から評価するために，ルベーグ積分の定義にもどって考える．次の性質をみたす番号 N_j $(j \in \mathbb{N})$ とたがいに素なボレル集合 $B_{j,k} \in \boldsymbol{B}^d$ および正数 $\alpha_{j,k}$ $(k = 1, \cdots, N_j)$ がとれる[7)]：単関数 $g_j = \sum_{k=1}^{N_j} \alpha_{j,k}\chi_{B_{j,k}}$ は単調非減少で，$g_j(\lambda) \leq |f(\lambda)|$, $\lim_{j\to\infty} g_j(\lambda) = |f(\lambda)|$ $(\lambda \in \mathbb{R}^d)$．したがって，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)| \, d\langle \Psi_N, E(\lambda)\Psi_N\rangle \geq \int_{\mathbb{R}^d} g_j(\lambda) \, d\langle \Psi_N, E(\lambda)\Psi_N\rangle$$

[7)] 伊藤 (1974) の定理 10.1.

$$= \sum_{k=1}^{N_j} \alpha_{j,k} \langle \Psi_N, E(B_{j,k})\Psi_N \rangle.$$

容易にわかるように,

$$\lim_{N\to\infty} \langle \Psi_N, E(B)\Psi_N \rangle = \langle \Psi, E(B)\Psi \rangle, \quad B \in \boldsymbol{B}^d.$$

したがって，上の不等式で $N \longrightarrow \infty$ とすれば,

$$C_1' \geq \sum_{k=1}^{N_j} \alpha_{j,k} \langle \Psi, E(B_{j,k})\Psi \rangle.$$

そこで，$j \longrightarrow \infty$ とすれば，$C_1' \geq \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|\, d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle = C_1$ を得る．したがって，$C_1 < \infty$. $(**)$ から,

$$C_1 \leq C_2. \qquad (***)$$

(3.7), (3.8) のいずれかが成立すれば，$(*)$, $(***)$ より，$C_1 = C_2$，すなわち，(3.9) が成立する． □

次の定理は後述のフォック空間の理論で特に重要な応用をもつ.

定理 3-7　$\mathscr{H}_n = \mathscr{K}_n$ $(n \geq 0)$ かつすべての A_n が自己共役である場合を考える.

(i)　A は自己共役であり,

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(A_n)} \qquad (3.11)$$

が成り立つ.

(ii)　A, A_n のスペクトル測度をそれぞれ，$E(B)$, $E^{(n)}(B)$ $(B \in \boldsymbol{B}^1)$ とすれば，$E(B) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} E^{(n)}(B)$ $(B \in \boldsymbol{B}^1)$ が成立する.

(iii)　$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して,

$$f(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} f(A_n)$$

が成り立つ.

証明　(i) A の自己共役性は命題 3-5 (i) から容易にわかる.

スペクトルの性質 (3.11) を示すために，$D := \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(A_n)} \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(A_n)$ とおく．このとき，$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(A_n)} = D \cup \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(A_n)\right]$. したがって，(3.5) を考慮すれば，$\sigma(A) \subset$

$D \cup \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(A_n)\right]$ を示すことにより，(3.11) が得られる．これは，$\varrho(A) \supset D^c \cap \left[\bigcap_{n=0}^{\infty} \varrho(A_n)\right]$ と同値である．そこで，こちらの関係を証明しよう．$z \in D^c \cap \left[\bigcap_{n=0}^{\infty} \varrho(A_n)\right]$ とする．このとき，すべての n に対して，$A_n - z$ は全単射で $(A_n - z)^{-1}$ は有界である．任意の $\Psi \in \mathfrak{H}$ に対して，$\Phi^{(n)} := (A_n - z)^{-1}\Psi^{(n)}$ とおけば，$\Phi^{(n)} \in D(A_n)$ であり，

$$(A_n - z)\Phi^{(n)} = \Psi^{(n)}. \qquad (*)$$

$z \in D^c$ により，ある正数 δ が存在して，任意の n に対して，

$$\inf_{\lambda \in \sigma(A_n)} |z - \lambda| \geq \delta.$$

この不等式と付録 B の命題 B-2 によって，$\sup_{n \geq 0} \|(A_n - z)^{-1}\| \leq \delta^{-1}$．したがって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi^{(n)}\|^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi^{(n)}\|^2 < \infty.$$

ゆえに，$\Phi \in \mathfrak{H}$．また，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n \Phi^{(n)}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|z\Phi^{(n)} + \Psi^{(n)}\|^2$$

$$\leq 2\left(|z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi^{(n)}\|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi^{(n)}\|^2\right) < \infty.$$

したがって，$\Phi \in D(A)$．これらの事実と (*) により，$(A - z)\Phi = \Psi$．したがって，$A - z$ は全射である．$A - z$ の単射性を示すために，$(A - z)\Psi = 0$ をみたす $\Psi \in D(A)$ があったとしよう．このとき，任意の $n \geq 0$ に対して，$\Psi^{(n)} \in D(A_n)$ かつ $(A_n - z)\Psi^{(n)} = 0$．$z \in \varrho(A_n)$ であるから，$\Psi^{(n)} = 0$．したがって，$\Psi = 0$．ゆえに，$A - z$ は単射である．以上から，$z \in \varrho(A)$ がしたがう．

(ii) $F(B) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} E^{(n)}(B)$ $(B \in \boldsymbol{B}^1)$ とおく．このとき，補題 3-6 (i) により，$\{F(B) \mid B \in \boldsymbol{B}^1\}$ は 1 次元のスペクトル測度である．$\{F(B) \mid B \in \boldsymbol{B}^1\}$ が A のスペクトル測度であることを示そう．ベクトル $\Psi \in \mathfrak{H}$ について，補題 3-6 (ii) により，

$$\int_{\mathbf{R}} |\lambda|^2 \, d\langle \Psi, F(\lambda)\Psi \rangle < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} |\lambda|^2 \, d\langle \Psi^{(n)}, E^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)} \rangle < \infty.$$

一方，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} |\lambda|^2 \, d\langle \Psi^{(n)}, E^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)} \rangle < \infty \Longleftrightarrow \Psi \in D(A).$$

したがって，

$$D(A)=\left\{\Psi\in\mathfrak{H}\;\middle|\;\int_{\mathbb{R}}|\lambda|^2 d\langle\Psi,F(\lambda)\Psi\rangle<\infty\right\}.$$

この事実は，また，任意の $\Psi\in D(A)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\Psi,A\Psi\rangle&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\lambda\,d\langle\Psi^{(n)},E^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)}\rangle\\&=\int_{\mathbb{R}}\lambda\,d\langle\Psi,F(\lambda)\Psi\rangle\end{aligned}$$

を意味する (最後の等式は，関数 λ を正の部分と負の部分にわけて，(3.9) を応用すれば得られる)．したがって，偏極恒等式を用いることにより，任意の $\Psi,\Phi\in D(A)$ に対して，$\langle\Phi,A\Psi\rangle=\int_{\mathbb{R}}\lambda\,d\langle\Phi,F(\lambda)\Psi\rangle$ が成立することになる．これとスペクトル測度の一意性は，F が A のスペクトル測度であることを導く．ゆえに，$E(B)=F(B)$ ($B\in\boldsymbol{B}^1$).

(iii) (ii) と $f(A)$ の定義によって，

$$D(f(A))=\left\{\Psi\in\mathfrak{H}\;\middle|\;\int_{\mathbb{R}}|f(\lambda)|^2\,d\langle\Psi,E(\cdot)\Psi\rangle<\infty\right\},$$

$$\langle\Phi,f(A)\Psi\rangle=\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\,d\langle\Phi,E(\lambda)\Psi\rangle,\quad \Phi\in\mathfrak{H},\Psi\in D(f(A)).$$

一方，

$$D\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty}f(A_n)\right)=\left\{\Psi\in\mathfrak{H}\;\middle|\;\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(\lambda)|^2\,d\langle\Psi^{(n)},E^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)}\rangle<\infty\right\}.$$

したがって，補題 3-6 によって，

$$D(f(A))=D\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty}f(A_n)\right).$$

(3.9) の応用により，任意の $\Psi\in D(f(A))$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\Phi,f(A)\Psi\rangle&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\,d\langle\Phi^{(n)},E^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)}\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\Phi^{(n)},f(A_n)\Psi^{(n)}\rangle\\&=\left\langle\Phi,\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty}f(A_n)\right)\Psi\right\rangle.\end{aligned}$$

よって，$f(A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}f(A_n)$.　□

定理 3-7 の応用として，次の事実をあげておく．

定理 3-8 $\mathscr{H}_n = \mathscr{K}_n$ $(n \geq 0)$ で各 A_n は自己共役であるとする．

(i) すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{itA} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} e^{itA_n}.$$

(ii) 各 n に対して，$A_n \geq 0$ ならば，$A \geq 0$ であり，すべての $t \geq 0$ に対して，

$$e^{-tA} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} e^{-tA_n}.$$

証明 (i) $f(\lambda) = e^{it\lambda}$ として，定理 3-7 (iii) を応用すればよい．

(ii) $f(\lambda) = e^{-t\lambda}$ として定理 3-7 (iii) を応用すればよい． □

3-2 節　全フォック空間

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間とし，$\mathscr{H}^{(0)} := \mathbb{C}$,

$$\mathscr{H}^{(n)} := \bigotimes^{n} \mathscr{H}, \quad n \geq 1, \tag{3.12}$$

($\mathscr{H}$ の n 重テンソル積) とおく．これらのヒルベルト空間の無限直和

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}^{(n)} \tag{3.13}$$

を $\mathscr{H}$ **上の全フォック空間** (full Fock space) という．

場の量子論の文脈では，$\mathscr{H}$ は 1 個の量子的粒子の状態を記述するヒルベルト空間 — これを **1 粒子空間** (one-particle space) という — を表し，$\mathscr{H}^{(n)}$ は，この量子的粒子が n 個集まった量子系 (n 粒子系) の状態を記述するヒルベルト空間となる．この意味で，$\mathscr{H}^{(n)}$ を **n 粒子空間**とよぶ．もちろん，$\mathscr{H}$ の具体的な実現は，対象とする量子的粒子の種類とそれに対してどういう描像を用いるかによって異なりうる．

全フォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ は，量子的粒子の数がいくらでも多くなりうるような量子系の状態空間を記述するためのヒルベルト空間の抽象的形態の 1 つである．

全フォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ のベクトル $\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ $(\Psi^{(n)} \in \mathscr{H}^{(n)}, n \geq 0)$ で,「ある番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば $\Psi^{(n)} = 0$」(条件にいう番号 n_0 は Ψ ごとに決まる) をみたすものを**有限粒子ベクトル** (finite particle vector) とよぶ．有限粒子ベクトルの全体を $\mathscr{F}_0(\mathscr{H})$ と記し，**有限粒子ベクトル空間**とよぶ．これは要するに $\{\mathscr{H}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ の代数的無限直和である：

$$\mathscr{F}_0(\mathscr{H}) := \hat{\bigoplus_{n=0}^{\infty}} \mathscr{H}^{(n)}. \tag{3.14}$$

有限粒子ベクトルのうち，その第 n 成分が

$$\Omega_{\mathscr{H}}^{(n)} := \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \geq 1) \end{cases} \tag{3.15}$$

によってあたえられる特別の単位ベクトル $\Omega_{\mathscr{H}} = \{1, 0, 0, \cdots\}$ を**フォック真空** (Fock vacuum) あるいは単に**真空**とよぶ．これは，物理的には，その呼称が示唆するように，粒子が全く存在しない状態を記述するベクトルを表す．

有限粒子ベクトル部分空間以外の有用な部分空間を導入しておく．すなわち，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の部分空間とするとき，

$$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}) := \hat{\bigoplus_{n=0}^{\infty}}\left(\hat{\otimes}^n \mathscr{D}\right) \tag{3.16}$$

を定義する ($\mathscr{D}$ の代数的テンソル積 $\hat{\otimes}^n \mathscr{D}$ の代数的無限直和)．ただし，$\hat{\otimes}^0 \mathscr{D} := \mathbb{C}$ とする．明らかに，

$$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}) \subset \mathscr{F}_0(\mathscr{H}).$$

$\mathscr{D}$ が $\mathscr{H}$ で稠密ならば，$\hat{\otimes}^n \mathscr{D}$ は $\mathscr{H}^{(n)}$ で稠密なので，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ は $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ で稠密である (命題 3-1 (i) による)．

例 3-1　(M, μ) を測度空間とし，$\mathscr{H} = L^2(M, d\mu)$ の場合を考えよう．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$M^n := M \times \cdots \times M$ (M の n 個の直積), $d\mu^n := d\mu \otimes \cdots \otimes d\mu$ (μ に関する，n 個の直積測度) とすれば，1 章 1-2 節の結果 (1.19) により，$\otimes^n L^2(M, d\mu) \cong L^2(M^n, d\mu^n)$ (自然な同型の意味で)．したがって，

$$\mathscr{F}(L^2(M, d\mu)) \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(M^n, d\mu^n).$$

ただし，$L^2(M^0, d\mu^0) := \mathbb{C}$ と規約する．

3-3 節　第 2 量子化作用素

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素があたえられたとき，これから全フォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ 上の閉作用素をつくることを考える．

T を $\mathscr{H}$ 上の可閉作用素で $D(T)$ が稠密であるものとする．このとき，命題 2-6 (ii) の場合と同様にして，任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$\mathscr{H}^{(n)}$ 上の作用素

$$\left(\sum_{j=1}^{n} I\otimes\cdots\otimes I\otimes \overset{j\text{ 番目}}{\breve{T}} \otimes I\otimes\cdots\otimes I\right)\restriction \hat{\otimes}^{n} D(T)$$

は可閉であることがわかる．この作用素の閉包を $T^{(n)}$ と記す：

$$T^{(n)} := \overline{\sum_{j=1}^{n} I\otimes\cdots\otimes I\otimes \overset{j\text{ 番目}}{\breve{T}} \otimes I\otimes\cdots\otimes I}. \tag{3.17}$$

便宜上，$T^{(0)} := 0$ とする．これらの作用素の無限直和を $d\Gamma(T)$ とする：

$$d\Gamma(T) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^{(n)}. \tag{3.18}$$

命題 3-5 (i), (ii) によって，$d\Gamma(T)$ は $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ 上の稠密に定義された閉作用素である．作用素 $d\Gamma(T)$ を T **の第 2 量子化** (second quantization) という．

場の量子論の文脈での作用素 $d\Gamma(T)$ の意味は次の通りである：T が 1 粒子からなる量子系での或る物理量 (たとえば，ハミルトニアン) を表す自己共役作用素であるとしよう．このとき，$T^{(n)}$ は同じ粒子が n 個ある系における，T と同種の物理量を表す．したがって，$d\Gamma(T)$ は当該の粒子が無限に存在し得る系における，T と同種の物理量を表す[8]．

命題 3-9 $T \neq 0$ ならば，$d\Gamma(T)$ は非有界である．

証明 T が非有界の場合は，$T^{(1)} = T$ と命題 3-3 の応用による．

次に T が有界である場合を考える．この場合，各 $T^{(n)}$ は有界である．$T \neq 0$ という仮定により，$T\psi \neq 0$ となる $\psi \in D(T)$ がある．必要ならば規格化することにより，$\|\psi\| = 1$ として一般性を失わない．そこで，$\Psi = \otimes^{n} \psi$ とおけば，$\Psi \in D(T^{(n)})$, $\|\Psi\| = 1$ であり，

$$\|T^{(n)}\Psi\|^2 = n(n-1)|\langle\psi, T\psi\rangle|^2 + n\|T\psi\|^2$$

[8] 作用素 $d\Gamma(T)$ を「第 2 量子化」と呼ぶのは，あまり適切とは思われないが，慣用にしたがう．8 章以降で見るように，$d\Gamma(T)$ は — ボソンフォック空間 (4 章を参照) やフェルミオンフォック空間 (5 章を参照) とよばれる閉部分空間に制限された形ではあるが — 序章で論じた場の量子化における基本的な物理量 (たとえば，ハミルトニアン，運動量) を数学的にきちんと定義するために用いられる．ところで，場の量子化というのは，序章の叙述から見てとれるように，決して "2 度目の" 量子化ではない．「第 2 量子化」という言葉は，場の量子論がつくられていく歴史的過程において，量子化の本質が見えず，1 度目の量子化が有限自由度の量子力学で，これをもう 1 度量子化したものが場の量子論であるという誤解に由来するものである．このあたりの歴史的経緯については，高林 (1977) の 13 章，14 章に詳しく書かれている．とはいえ，数学においては，対象の数学的内容だけが本質的であるから，仮にその対象が適切に命名されていなくても，その数学的意味内容さえ厳密につかんでおけば問題は生じない．もちろん，数学的対象に対して，その本質を表すような命名と記号がより有用であることは言うまでもない．

$$\geq n\|T\psi\|^2, \quad n \geq 1.$$

これと $\|T^{(n)}\Psi\|^2 \leq \|T^{(n)}\|^2$ によって，

$$\|T^{(n)}\| \geq \sqrt{n}\|T\psi\|.$$

したがって，$\sup_{n\geq 1}\|T^{(n)}\| = \infty$．ゆえに，命題 3-2 によって，$d\Gamma(T)$ は有界でない．□

命題 3-10　T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，$d\Gamma(T)$ は自己共役であり，以下の (i)〜(iv) が成り立つ．

(i)　真空 $\Omega_{\mathscr{H}}$ は，$d\Gamma(T)$ の固有値 0 に属する固有ベクトルである．

(ii)

$$\sigma(d\Gamma(T)) = \{0\} \cup \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \;\middle|\; \lambda_j \in \sigma(T), j = 1, \cdots, n\right\}\right)}.$$

(iii)

$$\sigma_{\mathrm{p}}(d\Gamma(T)) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \;\middle|\; \lambda_j \in \sigma_{\mathrm{p}}(T), j = 1, \cdots, n\right\}\right).$$

(iv)　$D \subset \mathscr{H}$ を T^p (p は任意に固定された自然数) の芯とするとき，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(D)$ は $d\Gamma(T)^p$ の芯である．

証明　T が自己共役ならば，定理 3-7 (i) によって，$d\Gamma(T)$ は自己共役である．

(i) 定義から，

$$d\Gamma(T)\Omega_{\mathscr{H}} = 0. \tag{3.19}$$

(ii) 定理 3-7 (i), (3.11) の応用により，

$$\sigma(d\Gamma(T)) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}\sigma(T^{(n)})}.$$

定理 2-29 によって，$n \geq 1$ ならば，

$$\sigma(T^{(n)}) = \overline{\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \;\middle|\; \lambda_j \in \sigma(T),\, j = 1, \cdots, n\right\}}. \tag{3.20}$$

また，$\sigma(T^{(0)}) = \{0\}$．ゆえに，求める結果を得る．

(iii) 定理 2-31 から，

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T^{(n)}) = \left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \;\middle|\; \lambda_j \in \sigma_{\mathrm{p}}(T),\, j = 1, \cdots, n\right\}. \tag{3.21}$$

これと命題 3-5 (ii) の (3.6) を応用することにより，求める結果が得られる．

(iv) 定理 3-7 (iii) によって，

$$d\Gamma(T)^p = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(T^{(n)})^p. \tag{3.22}$$

定理 2-25 を応用することにより，$\hat{\otimes}^n D$ は $(T^{(n)})^p$ の芯であることがわかる．したがって，命題 3-5 (iii) により，$\mathscr{F}_{\rm fin}(D)$ は $d\Gamma(T)^p$ の芯である． □

$\mathscr{H}$ 上の恒等作用素 I の第 2 量子化作用素 $d\Gamma(I)$ を**個数作用素** (number operator) とよび $\hat{N}$ と記す：

$$\hat{N} := d\Gamma(I). \tag{3.23}$$

この名称は，$\hat{N}\restriction\mathscr{H}^{(n)} = n$ (整数 n をかける作用素) という事実による．命題 3-10 により，

$$\sigma(\hat{N}) = \sigma_{\rm p}(\hat{N}) = \{0\} \cup \mathbb{N}. \tag{3.24}$$

特に，$\hat{N} \geq 0$，すなわち，$\hat{N}$ は非負自己共役作用素である．

$\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，S を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への稠密に定義された可閉作用素とし，

$$\Gamma(S) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes^n S \tag{3.25}$$

を定義する．ただし，$\otimes^0 S := 1$．$\Gamma(S)$ を作用素 S の**第 2 種の第 2 量子化**とよぶ[9]．

命題 3-5 (i), (ii) によって，$\Gamma(S)$ は $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ から $\mathscr{F}(\mathscr{K})$ への稠密に定義された閉作用素である．作用素 $\Gamma(S)$ の非有界性あるいは有界性については，次の命題が成り立つ．作用素 $d\Gamma(\cdot)$ との違いに注意しよう．

命題 3-11

(i) $S \neq 0$ が非有界ならば，$\Gamma(S)$ は非有界である．

(ii) S が有界で $\|S\| > 1$ ならば，$\Gamma(S)$ は非有界である．

(iii) S が縮小作用素 (i.e., S は有界で $\|S\| \leq 1$ をみたす) ならば，$\Gamma(S)$ は縮小作用素である．

証明 (i) $\otimes^1 S = S$ が非有界であることと命題 3-3 の応用による．

---

[9] $\Gamma(S)$ もしばしば単に S の第 2 量子化とよばれることがある．だが，これは $d\Gamma(\cdot)$ との混同を招くおそれがあるので，本書では,「第 2 種」という接頭語をつけた．この命名は，標準的なものではなく，著者の発案であることをお断りしておく．

(ii) S が有界ならば，$\overset{n}{\otimes} S$ も有界であり，(2.8) によって，

$$\|\overset{n}{\otimes} S\| = \|S\|^n. \tag{3.26}$$

$\|S\| > 1$ により，$\sup_{n\geq 1} \|S\|^n = \infty$．したがって，

$$\sup_{n\geq 1} \|\overset{n}{\otimes} S\| = \infty.$$

ゆえに，命題 3-2 によって，$\Gamma(S)$ は有界でない．

(iii) $\|S\| \leq 1$ ならば，(3.26) によって，$\|\overset{n}{\otimes} S\| \leq 1$．したがって，命題 3-5 (vi) によって，$\Gamma(S)$ は縮小作用素である． □

作用素 $\Gamma(S)$ の基本的な性質は次の命題にまとめられる．

命題 3-12

(i) $\mathscr{H} = \mathscr{K}$ のとき，S が自己共役ならば，$\Gamma(S)$ は自己共役である．

(ii) $U : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{K}$ がユニタリならば，$\Gamma(U)$ はユニタリであり，

$$\Gamma(U)\mathscr{F}_{\text{fin}}(\mathscr{H}) = \mathscr{F}_{\text{fin}}(\mathscr{K}). \tag{3.27}$$

(iii) $S \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ を縮小作用素，S' を $\mathscr{K}$ からヒルベルト空間 $\mathscr{M}$ への縮小作用素とすれば，

$$\Gamma(S'S) = \Gamma(S')\Gamma(S). \tag{3.28}$$

(iv) $S_N, S \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ $(N \in \mathbb{N})$ が縮小作用素で s-$\lim_{N\to\infty} S_N = S$ ならば，

$$\text{s-}\lim_{N\to\infty} \Gamma(S_N) = \Gamma(S)$$

が成り立つ．

証明 (i) 仮定のもとで，$\overset{n}{\otimes} S$ は自己共役である．したがって，定理 3-7 (i) によって，$\Gamma(S)$ は自己共役である．

(ii) U がユニタリならば，$\overset{n}{\otimes} U$ はユニタリである．したがって，命題 3-5 (v) によって，$\Gamma(U)$ はユニタリである．(3.27) は，$\Gamma(\cdot)$ の定義から容易にわかる．

(iii) S が縮小作用素ならば，命題 3-11 (iii) によって，$\Gamma(S)$ は縮小作用素である．(3.28) は，まず，$\mathscr{F}_{\text{fin}}(\mathscr{H})$ で成立することが $\Gamma(\cdot)$ の定義から容易にわかる．この事実と $\Gamma(\cdot)$ の有界性および $\mathscr{F}_{\text{fin}}(\mathscr{H})$ の稠密性により，有界作用素の等式としての (3.28)

が得られる[10].

(iv) 命題 3-4 を，$A_n = \overset{n}{\otimes} S$, $A_{n,N} = \overset{n}{\otimes} S_N$ として応用することができることに注意すればよい. □

注意 3-5 ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素の全体を $\mathfrak{U}(\mathscr{H})$ とすれば，これは作用素の積に関して群をなす[11]. 命題 3-12 により，対応 $\Gamma : U \longrightarrow \Gamma(U)$ は，$\mathfrak{U}(\mathscr{H})$ から $\mathfrak{U}(\mathscr{F}(\mathscr{H}))$ への写像であり，

$$\Gamma(UV) = \Gamma(U)\Gamma(V), \quad U, V \in \mathfrak{U}(\mathscr{H}),$$

をみたす. 特に，$\Gamma(U^{-1}) = \Gamma(U)^{-1}$ ($\Gamma(I) = I$ に注意). したがって，Γ は群 $\mathfrak{U}(\mathscr{H})$ から群 $\mathfrak{U}(\mathscr{F}(\mathscr{H}))$ への 1 対 1 の準同型写像をあたえる. この事実は場の量子論における，群のユニタリ表現に使われる (7 章，9 章を参照).

作用素 $\Gamma(\cdot)$ と $d\Gamma(\cdot)$ の基本的な関係は次の定理であたえられる.

定理 3-13 T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする.

(i) すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\Gamma(e^{itT}) = e^{itd\Gamma(T)}. \tag{3.29}$$

(ii) $T \geq 0$ ならば，$d\Gamma(T) \geq 0$ であり，すべての $t \geq 0$ に対して，

$$\Gamma(e^{-tT}) = e^{-td\Gamma(T)}. \tag{3.30}$$

証明 (i) 定理 3-8 (i) によって，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{itd\Gamma(T)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} e^{itT^{(n)}}.$$

一方，定理 2-34 (i) によって，

$$e^{itT^{(n)}} = \overset{n}{\otimes} e^{itT}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

---

[10] 有界作用素の拡大定理 (新井 (1997a) の定理 2.8) における一意性の応用. 補題 2-4 を参照.

[11] 集合 G が群 (group) であるとは，G の任意の 2 つの元 a, b に対して，積 $ab \in G$ が定義されており，次の 3 つの条件がみたされる場合をいう：(i) (**結合律**) 任意の a, b, $c \in G$ に対して，$a(bc) = (ab)c$ が成り立つ. (ii) (**単位元の存在**) すべての $a \in G$ に対して，$ae = ea = e$ をみたす元 $e \in G$ が存在する. e を G の**単位元**という. (iii) (**逆元の存在**) 各 $a \in G$ に対して，$aa^{-1} = a^{-1}a = e$ をみたす元 $a^{-1} \in G$ が存在する. a^{-1} を a の**逆元**という. 群 G から群 H への写像 $\phi : a \longrightarrow \phi(a)$ ($a \in G, \phi(a) \in H$) が任意の a, $b \in G$ に対して，$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ をみたすとき，ϕ を G から H(の中) への**準同型写像** (homomorphism) という. V をベクトル空間とし，V 上の線形作用素の全体を $\mathfrak{L}(V)$ とする. 群 G から $\mathfrak{L}(V)$ に含まれる群への準同型写像 φ が存在するとき，(φ, V) を G の**表現**という. この場合，V を**表現空間**という. 群についてさらに詳しいことは，たとえば，山内-杉浦 (1960) を参照.

したがって，(3.29) が得られる．

(ii) $T \geq 0$ ならば，系 2-27 (iii) によって，$T^{(n)} \geq 0$ $(n \geq 1)$．したがって，定理 3-34 (ii) により，$d\Gamma(T) \geq 0$ であり，任意の $t \geq 0$ に対して，

$$e^{-td\Gamma(T)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} e^{-tT^{(n)}}.$$

一方，定理 2-34 (ii) によって，

$$e^{-tT^{(n)}} = \otimes^n e^{-tT}, \quad t \geq 0. \tag{3.32}$$

したがって，(3.30) が得られる．□

3-4 節　第 2 量子化作用素の交換性

命題 3-14　S, T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とし，$D([S,T]) := D(ST) \cap D(TS)$ は稠密であり，$[S,T]$ は可閉であるとする．このとき，$\mathscr{F}_{\rm fin}(D([S,T])) \subset D([d\Gamma(S), d\Gamma(T)])$ であり，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\rm fin}(D([S,T]))$ に対して，

$$[d\Gamma(S), d\Gamma(T)]\Psi = d\Gamma([S,T])\Psi \tag{3.33}$$

が成り立つ．

証明　ベクトル $\Psi \in \mathscr{F}_{\rm fin}(D([S,T]))$ で

$$\Psi^{(n)} = \bigotimes_{j=1}^{n} \Psi_j, \quad n \geq 1,\ \Psi_j \in D([S,T]),\ j = 1, \cdots, n$$

という形のものに対して，主張を示せば十分である．この場合，$\Psi^{(n)} \in D([S^{(n)}, T^{(n)}])$ であって (したがって，$\Psi \in D([d\Gamma(S), d\Gamma(T)])$),

$$S^{(n)}T^{(n)}\Psi^{(n)} = \sum_{j \neq k}^{n} \Psi_1 \otimes \cdots \otimes S\Psi_j \otimes \cdots \otimes T\Psi_k \otimes \cdots \otimes \Psi_n$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \Psi_1 \otimes \cdots \otimes ST\Psi_j \otimes \cdots \otimes \Psi_n.$$

$T^{(n)}S^{(n)}\Psi^{(n)}$ は，右辺の S と T を入れ換えた式であたえられる．したがって，

$$[S^{(n)}, T^{(n)}]\Psi^{(n)} = [S,T]^{(n)}\Psi^{(n)}$$

を得る．これは (3.33) を意味する．□

注意 3-6　ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の有界線形作用素の空間 $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ は，交換子 $[\cdot, \cdot]$ を

括弧積とする，1 つのリー代数である[12]．命題 3-14 は，対応：$S \longrightarrow d\Gamma(S)$ がリー代数としての $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ の (非有界) 表現ををあたえることを示すものである．フォック空間と群や代数の表現の関わりについては，たとえば，Ottesen (1995) を参照.

命題 3-14 は，S と T が可換ならば，$d\Gamma(S)$ と $d\Gamma(T)$ が $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(D([S,T]))$ 上で可換であることを意味する．この命題の系として次を得る．

系 3-15 T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．このとき，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(D(T)) \subset D([\hat{N}, d\Gamma(T)])$ であり，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(D(T))$ に対して，

$$[\hat{N}, d\Gamma(T)]\Psi = 0.$$

証明 命題 3-14 の仮定が $S = I$ の場合にみたされることを確かめればよい． □

S, T が自己共役の場合，$d\Gamma(S)$ と $d\Gamma(T)$ は自己共役なので，これらの作用素について強可換性の概念が考えられる．命題 3-14 により，S と T が可換ならば，$d\Gamma(S)$ と $d\Gamma(T)$ は，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(D([S,T]))$ 上で可換である．だが，強可換であるとは限らない．強可換性に関する特徴づけは次の命題によってあたえられる．

命題 3-16 S, T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，自己共役作用素 $d\Gamma(S)$ と $d\Gamma(T)$ が強可換であるための必要十分条件は，S と T が強可換となることである．

証明 (3.28) と (3.29) によって，

$$e^{is\, d\Gamma(S)} e^{it\, d\Gamma(T)} = \Gamma(e^{isS} e^{itT}), \quad s, t \in \mathbb{R}. \tag{3.34}$$

(必要性) $d\Gamma(S)$ と $d\Gamma(T)$ が強可換であるとする．このとき，命題 2-16 により，すべての $s, t \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{is\, d\Gamma(S)}$ と $e^{it\, d\Gamma(T)}$ は可換である．これと (3.34) により，$\Gamma(e^{isS} e^{itT}) = \Gamma(e^{itT} e^{isS})$．この等式を特に $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ の閉部分空間としての $\mathscr{H}$ に制限して考えれば，$e^{isS} e^{itT} = e^{itT} e^{isS}$ が導かれる．この結果と再び命題 2-16 によっ

---

[12] $\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の任意の 2 つの元 X, Y に対して，**括弧積**とよばれる，$\mathfrak{g}$ の元 $[X,Y]$ が定まり，次の 3 つの性質がみたされるとき，$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{F}$ **上のリー代数 (Lie algebra)** またはリー**環**という：(i) (線形性) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ (X, $Y \in \mathfrak{g}$, a, $b \in \mathbb{F}$)，(ii) (反対称性) $[X,Y] = -[Y,X]$ (X, $Y \in \mathfrak{g}$)，(iii) (**ヤコビ律**) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$)．$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ のとき，$\mathfrak{g}$ を実リー代数，$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ のとき，$\mathfrak{g}$ を複素リー代数という．括弧積は**交換子積**または**リー積**とよばれる場合もある．$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を $\mathbb{F}$ 上のリー代数とするとき，写像 $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ が，線形であり，任意の X, $Y \in \mathfrak{g}$ に対して，$f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$ をみたすとき，f を $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{h}$ への**準同型写像**という．$\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 V に対して，$\mathbb{F}$ 上のリー代数 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{L}(V)$ (V 上の線形作用素の全体) への準同型写像 ϱ が存在するとき，(ϱ, V) を $\mathfrak{g}$ の**表現**という ($\mathfrak{L}(V)$ の括弧積は，作用素の交換子とする)．リー代数についてさらに詳しいことは，たとえば，山内-杉浦 (1960) を参照.

て，S と T は強可換であることが結論される．

(十分性) S と T は強可換であるとする．このとき，命題 2-16 と (3.34) によって，すべての $s, t \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{is\,d\Gamma(S)}$ と $e^{it\,d\Gamma(T)}$ は可換である．ゆえに，$d\Gamma(S)$ と $d\Gamma(T)$ が強可換である．□

系 3-17　T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，$\hat{N}$ と $d\Gamma(T)$ は強可換である．

証明　容易にわかるように，$\mathscr{H}$ 上の恒等作用素 I と T は強可換である．したがって，命題 3-16 により，題意がしたがう．□

ノート

フォック空間の最初の具象的な形は，Fock (1932) によってあたえられた．(ボソン) フォック空間へと到る物理的な発見法的議論については序章の注意 0-3 に述べた．フォック空間の数学的に厳密な定式化と理論展開に関する初期の仕事として Cook (1953) や Segal (1956) がある．

注意 3-5 において，第 2 種の第 2 量子化作用素 $\Gamma(\cdot)$ の 1 つの数学的意味について述べたが，実は第 2 種の第 2 量子化作用素にはもっと一般的な理念が現れている．このことについて簡単にふれておこう．

すべてのヒルベルト空間の集まりを $\boldsymbol{H}$，ヒルベルト空間からヒルベルト空間への縮小作用素の全体を $\mathfrak{C}$ とすると，$\boldsymbol{H}$ と $\mathfrak{C}$ の対は 1 つの圏 (category) をあたえる[13]．これをいま Hilbert($\mathfrak{C}$) と書く．つまり，Hilbert($\mathfrak{C}$) はヒルベルト空間を対象，縮小作用素を射とする圏である．他方，全フォック空間を対象とし，全フォック空間から全フォック空間への縮小作用素を射とする圏を考えることができる．これを Fock($\mathfrak{C}$) と書こう．このとき

$$\tilde{\Gamma}(\mathscr{H}) := \mathscr{F}(\mathscr{H}), \quad \mathscr{H} \in \boldsymbol{H},$$

$$\tilde{\Gamma}(S) := \Gamma(S), \quad S \in \mathfrak{C}$$

によって定義される対応 $\tilde{\Gamma}$: Hilbert($\mathfrak{C}$) $\longrightarrow$ Fock($\mathfrak{C}$) は，命題 3-12 (iii) によって，関手 (functor) であることがわかる[14]．つまり，第 2 種の第 2 量子化作用素 $\Gamma(\cdot)$ というのは 1 つの関手なのである．

フォック空間の理論は，実は量子場の理論以外にも応用を持つ．たとえば，Grassborger and Scheunert (1980) を参照．

---

[13] 圏については，たとえば，Mac Lane (1986) の 11 章，9 節を参照．

[14] 関手についても前掲書を参照．

3 章演習問題

$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{H}_n$, $\mathscr{K}_n$, $\mathscr{M}_n$ $(n \geq 0)$ をヒルベルト空間とする．

1. $\mathscr{H}_n$ の任意の部分空間 $\mathscr{D}_n \neq \{0\}$ に対して，$\hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$ は完備でないことを示せ．

ヒント　仮定により，各 n に対して，$\Phi^{(n)} \in \mathscr{D}_n$, $\|\Phi^{(n)}\| = 1$ となるベクトル Φ_n がとれる．$N \in \mathbb{N}$ に対して，ベクトル $\Psi_N \in \hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$ を $0 \leq n \leq N$ のとき，$\Psi_N^{(n)} := \Phi^{(n)}/(n+1)$; $n \geq N+1$ のとき，$\Psi_N^{(n)} = 0$ によって定義する．このとき，$\{\Psi_N\}_{N=1}^{\infty}$ は $\hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$ の基本列 (コーシー列) であるが $\hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_n$ の中には収束しないことを示せ．

2. A_n は $\mathscr{H}_n$ から $\mathscr{K}_n$ への線形作用素，B_n は $\mathscr{K}_n$ から $\mathscr{M}_n$ への線形作用素とする．$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$ とおく．このとき，

$$BA \subset \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n A_n$$

を示せ．

3. $A_{n,N}, A_n \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_n, \mathscr{K}_n)$ $(n \geq 0,\ N \in \mathbb{N})$ とし，

$$A(N) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{n,N}$$

とおく．A を (3.3) で定義される作用素とする．次を仮定する：

$$\sup_{n \geq 0} \|A_n\| < \infty, \qquad \sup_{n \geq 0, N \in \mathbb{N}} \|A_{n,N}\| < \infty.$$

(i)　A, $A(N) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{K})$ を示せ．

(ii)　もし，

$$\text{w-}\lim_{N \to \infty} A_{n,N} = A_n \quad n \geq 0,$$

ならば[15]，

$$\text{w-}\lim_{N \to \infty} A(N) = A$$

が成立することを証明せよ．

(iii)　もし，

$$\sup_{n \geq 0} \|A_{n,N} - A_n\| < \infty, \quad N \geq 1,$$

---

[15]「w-lim」は弱極限を表す．すなわち，S_N, $S \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ とするとき，$\text{w-}\lim_{n \to \infty} S_N = S \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\psi \in \mathscr{H}, \phi \in \mathscr{K}$ に対して，$\lim_{N \to \infty} \langle \phi, S_N \psi \rangle = \langle \phi, S\psi \rangle$．

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geq 0}\|A_{n,N}-A_n\|=0,$$

ならば

$$\lim_{N\to\infty}\|A(N)-A\|=0$$

が成立することを証明せよ．

4. A を (3.3) で定義される作用素とし，$\mathscr{H}_n=\mathscr{K}_n$ $(n\geq 0)$ とする．各 A_n が正規作用素ならば，A も正規作用素であることを示せ．

5. T, S を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．

(i)　任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して，$d\Gamma(\alpha T)=\alpha d\Gamma(T)$ を示せ．

(ii)　$d\Gamma(T^*)\subset d\Gamma(T)^*$ を示せ．

(iii)　$S+T$ が稠密に定義された可閉作用素のとき，$d\Gamma(T)+d\Gamma(S)\subset d\Gamma(S+T)$ を示せ．

6. $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ 上の第 2 種の第 2 量子化作用素 $\Gamma(0)$ (この 0 は $\mathscr{H}$ 上の零作用素) はフォック真空 $\Omega_{\mathscr{H}}$ から生成される 1 次元部分空間への正射影作用素であることを示せ．

7. $\hat{N}$ を $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ 上の個数作用素とする．

(i)　$\hat{N}$ のスペクトル測度を $E_{\hat{N}}(\cdot)$ とするとき，任意のボレル集合 $B\subset\mathbb{R}$ と $\Psi\in\mathscr{F}(\mathscr{H})$ に対して，$\|E_{\hat{N}}(B)\Psi\|^2=\sum_{n\in B}\|\Psi^{(n)}\|^2$ が成立することを示せ．

ヒント　$\mathscr{F}(\mathscr{H})$ の閉部分空間としての n 粒子空間 $\mathscr{H}^{(n)}$ は，$\hat{N}$ の固有値 n に属する固有空間である．したがって，$\mathscr{F}(\mathscr{H})$ から $\mathscr{H}^{(n)}$ の正射影作用素を P_n とすれば，$P_n\Psi=\Psi^{(n)}$ $(n\geq 0)$ であり，$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=I$ (強収束)．これと一般的な事実 (新井 (1997a) の p.111，例 3.3 あるいは新井-江沢 (1999a) の p.192，例 2.21) を使えばよい．

(ii)　(i) と作用素解析を用いて，任意の $z\in\mathbb{C}$ と $c>0$ に対して，$\Gamma(ce^z)=e^{(z+\log c)\hat{N}}$ を示せ．

8. S が $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への縮小作用素ならば，$\Gamma(S)^*=\Gamma(S^*)$ であることを示せ．

9. S が $\mathscr{H}$ 上の縮小作用素でかつ正規ならば，$\Gamma(S)$ は正規作用素であることを示せ．

ヒント　命題 3-12 (iii) または問題 4.

第4章

ボソンフォック空間

全フォック空間の重要な閉部分空間の 1 つであるボソンフォック空間に関する理論を展開する. この理論は, ボース場とよばれる量子場の諸々のモデルを数学的に真なる存在として構成する上で基礎となるものである.

4-1 節　はじめに — 物理的背景

素粒子の相互作用によって生起する諸現象を原理的な形式で解明するための理論的アプローチの 1 つとして場の量子論が創られ, 発展したきたことについては序章で述べた. ところで, 同種の素粒子どうしは, 古典的 (巨視的) な粒子の場合とは異なり, たがいに区別することができない (不可弁別性の原理). この性質によって, 同種の多数の素粒子からなる量子系の状態の在り方はある種の特徴を帯びることになる. 同種の素粒子が, 1 つの状態に何個でも存在することができるとき, この素粒子は**ボース-アインシュタン統計**にしたがうという[1]. これとは対照的に, 同種の素粒子が, 1 つの状態には高々1 個しか存在できないような場合, **フェルミ-ディラック統計**にしたがうという. ボース-アインシュタン統計にしたがう素粒子を**ボソン**あるいは**ボース粒子**, フェルミ-ディラック統計にしたがう素粒子を**フェルミオン**あるいは**フェルミ粒子**という. 電子や核子はフェルミオンであり, π 中間子や光子はボソンである. こうして, 素粒子の統計の違いに応じて, 同一の素粒子の多体系の状態のヒルベルト空間の構造は異なることになる. つまり, ボソンの多体系 — ボソン系 — とフェルミオンの多体系 — フェルミオン系 — に応じて, 2 種類のヒルベルト空間を考えなければならない. この章で論じ

---

[1]「統計」というのは, 同種の多数の素粒子からなる系がとりうる状態の在り方をさす.

るボソンフォック空間は前者を記述するための 1 つのヒルベルト空間であり，5 章で論述するフェルミオンフォック空間は後者を記述するための 1 つのヒルベルト空間である．

この事と関連して，次の点にもふれておこう．素粒子は，**スピン角運動量**とよばれる，内部自由度に関する物理量を担っている．ここで，内部自由度というのは，空間的自由度 (外部自由度) とは一応独立な物理的性質に関わる自由度のことをさす．スピン角運動量は，描像としては，"内部自由度に関する回転" の角運動量と見られるものである．素粒子の軌道角運動量とスピン角運動量の和が全角運動量をあたえる．各素粒子に対して，数 $s \in \{n/2 \,|\, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ — 整数 $(0,1,2,\cdots)$ または半整数 $(1/2,3/2,\cdots)$ — が 1 つ定まり，空間の任意の方向へのスピン角運動量の成分の可能な固有値は $s\hbar$, $(s-1)\hbar, \cdots, (-s+1)\hbar$, $-s\hbar$ である．この数 s を当該の素粒子の**スピン量子数** (スピンの大きさ) あるいは単に**スピン**とよぶ．

π 中間子や K 中間子はスピンが 0 の素粒子であり，電子や核子のスピンは 1/2，電磁場の量子である光子のスピンは 1 である．

質量が正でスピンが s の素粒子については，空間の任意の方向へのスピン角運動量の成分は，実際，上述の固有値に対応する $2s+1$ 個の固有状態をもつ．したがって，この場合のスピン角運動量が働く (内部自由度に関する) 状態空間は，$(2s+1)$ 次元ユニタリ空間 $\mathbb{C}^{2s+1}$ にとれる．他方，質量が 0 の素粒子の場合は，スピンがいかなる値であっても，空間の任意の方向へのスピン角運動量の成分は，高々2 個の固有状態しかもたないことが実験的に知られる．したがって，この場合のスピン自由度に関する状態空間は $\mathbb{C}^2$ または $\mathbb{C}$ である．たとえば，光子のスピン角運動量の任意の方向への成分は，固有値 $\pm\hbar$ に対応する 2 個の固有状態しかもたない[2)]．

一般に，整数スピンの素粒子はボース-アインシュタイン統計にしたがい，半整数スピンの素粒子はフェルミ-ディラック統計にしたがうことが知られる．この実験的に確認されている法則性を**スピンと統計の関係**という[3)]．こうして，スピンの概念を用いるならば，ボソンフォック空間は整数スピンの素粒子の状態を，フェルミオンフォック空間は半整数スピンの素粒子の状態を記述するヒルベルト空間であると言い換えることができる．

---

2) 理論的には，相対論的不変性とゲージ不変性による．たとえば，武田-宮沢 (1974) の 6 章，§6.1 を参照．軌道角運動量やスピンについての詳しい物理的解説も同書にある．

3) これは，相対論的場の量子論の枠組みで理論的に導くこともできる．たとえば，ボゴリューボフ他 (1972) の 5 章，§3 を参照．

4-2 節　ボソンフォック空間

$\mathscr{H}$ を可分なヒルベルト空間とする[4]．このとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathscr{H}$ の n 重対称テンソル積 $\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ がつくられる (1 章 1-4 節を参照)．これらのヒルベルト空間の無限直和

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \tag{4.1}$$

を **$\mathscr{H}$ 上のボソンフォック空間**あるいは **$\mathscr{H}$ 上の対称フォック空間**という．これは全フォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ の閉部分空間である．明らかに，フォック真空 $\Omega_{\mathscr{H}}$ ((3.15) を参照) は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の元である．

S_n を $\overset{n}{\otimes} \mathscr{H}$ 上の対称化作用素とし (1 章 1-4 節を参照)，全フォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ 上の作用素 P_{b} を

$$P_{\mathrm{b}} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \tag{4.2}$$

によって定義すれば，命題 3-5 (vii) によって，P_{b} は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上への正射影作用素である．

$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の閉部分空間としての $\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ は，具体的な量子場のモデルの文脈では，n 個の同種のボソンからなる系の状態空間を表す．このため，$\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ は，ボソンの **n 粒子空間**とよばれる．

命題 1-14 (i) と命題 3-1 (ii) によって，次の事実が得られる．

命題 4-1　$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ の CONS とし，$\mathscr{E}_{\mathrm{s}}^{(n)}$ を命題 1-14 (i) で定義された集合とする．このとき，$\{\Omega_{\mathscr{H}}\} \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_{\mathrm{s}}^{(n)}\right]$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の CONS である．

例 4-1　(M, μ), M^n, $d\mu^n$ を例 3-1 のものとし，$\mathscr{H} = L^2(M, d\mu)$ の場合を考える．ヒルベルト空間 $L^2(M^n, d\mu^n)$ の元 ψ で完全対称なもの，すなわち，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\psi(m_1, \cdots, m_n) = \psi(m_{\sigma(1)}, \cdots, m_{\sigma(n)}),\ \mu\text{-a.e.}(m_1, \cdots, m_n) \in M^n$$

をみたすものの全体を $L^2_{\mathrm{sym}}(M^n, d\mu^n)$ とおく．このとき，自然な同型

$$L^2(M^n, d\mu^n) \cong \overset{n}{\otimes} L^2(M, d\mu)$$

---

[4] 以下，本書で扱う抽象ヒルベルト空間については，可分のものだけを扱う．

のもとで，$\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} L^2(M,d\mu)$ の元 $S_n(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n)$ ($\psi_j \in L^2(M,d\mu)$, $j=1,\cdots,n$) と $L^2_{\mathrm{sym}}(M^n, d\mu^n)$ の元

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\psi_{\sigma(1)}(m_1)\cdots\psi_{\sigma(n)}(m_n)$$

が同一視される．これから，

$$\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} L^2(M,d\mu) \cong L^2_{\mathrm{sym}}(M^n, d\mu^n)$$

という同一視が得られる．したがって，

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(M,d\mu)) \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\mathrm{sym}}(M^n, d\mu^n).$$

ただし，$L^2_{\mathrm{sym}}(M^0, d\mu^0) := \mathbb{C}$ とする．

4-3 節　消滅作用素と生成作用素

4-3-1　定義と基本的性質

次の補題はヒルベルト空間論における基本的で有用な事実の 1 つである．

補題 4-2　$\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ をヒルベルト空間，F を $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 上の準双線形形式とする[5)]．さらに，F は有界，すなわち，定数 C があって，すべての $\Psi \in \mathscr{H}_1$ と $\Phi \in \mathscr{H}_2$ に対して $|F(\Psi,\Phi)| \le C\|\Psi\|_{\mathscr{H}_1}\|\Phi\|_{\mathscr{H}_2}$ が成り立つとする．このとき，$\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ への有界線形作用素 T で，

$$F(\Psi,\Phi) = \langle T\Psi, \Phi\rangle_{\mathscr{H}_2}, \quad \Psi \in \mathscr{H}_1, \Phi \in \mathscr{H}_2$$

となるものがただ 1 つ存在する．さらに，$\|T\| \le C$ である．

証明　$\Psi \in \mathscr{H}_1$ を任意に固定し，写像 $L : \mathscr{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ を $L(\Phi) := F(\Psi,\Phi)$ ($\Phi \in \mathscr{H}_2$) によって定義する．このとき，$|L(\Phi)| \le C\|\Psi\|\|\Phi\|$ であるから，$L(\Phi)$ は有界線形汎関数である．したがって，リースの表現定理により，$L(\Phi) = \langle \Xi_\Psi, \Phi\rangle$ ($\Phi \in \mathscr{H}_2$) となる $\Xi_\Psi \in \mathscr{H}_2$ がただ 1 つ存在し，$\|\Xi_\Psi\| = \|L\| \le C\|\Psi\|$ が成立する．したがって，写像 $T : \mathscr{H}_1 \longrightarrow \mathscr{H}_2$ が $T\Psi := \Xi_\Psi$ によって定義され，この写像は有界線形作用素になることがわかる．ゆえに，題意の有界線形作用素の存在が示される．一意性は容易である．□

5) 1 章 1-1 節，注意 1-1 (i) を参照.

任意の非負整数 n と $f \in \mathscr{H}$ および任意の $\Phi \in \overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}, \Psi \in \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ に対して,

$$L_n(\Phi, \Psi) = \sqrt{n+1}\langle \Phi, S_{n+1}(f \otimes \Psi)\rangle_{\overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}} \tag{4.3}$$

とおくと, L_n は直積空間 $\overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \times \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ 上の準双線形形式である. 容易にわかるように,

$$|L_n(\Phi, \Psi)| \le \sqrt{n+1}\,\|f\|\|\Phi\|\|\Psi\|.$$

したがって, L_n は有界である. ゆえに, 補題 4-2 によって,

$$L_n(\Phi, \Psi) = \langle A_n(f)\Phi, \Psi\rangle_{\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}}, \quad \Phi \in \overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H},\ \Psi \in \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}, \tag{4.4}$$

をみたす有界線形作用素

$$A_n(f) : \overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \longrightarrow \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$$

が一意的に存在し,

$$\|A_n(f)\Phi\| \le \sqrt{n+1}\,\|f\|\|\Phi\| \tag{4.5}$$

が成立する.

$$\cdots \longleftarrow \overset{n-1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \xleftarrow{A_{n-1}(f)} \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \xleftarrow{A_n(f)} \overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \xleftarrow{A_{n+1}(f)} \cdots.$$

(4.3) と (4.4) から,

$$\langle A_n(f)\Phi, \Psi\rangle_{\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}} = \sqrt{n+1}\,\langle \Phi, S_{n+1}(f \otimes \Psi)\rangle_{\overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}}, \quad \Phi \in \overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}, \Psi \in \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}. \tag{4.6}$$

特別な形のベクトル

$$\Phi = \phi_1 \cdots \phi_{n+1} = S_{n+1}(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_{n+1})$$

$(\phi_j \in \mathscr{H},\ j = 1, \cdots, n+1)$ ((1.40) を参照), については, 任意の $\Psi \in \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle A_n(f)\Phi, \Psi\rangle_{\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}} &= \sqrt{n+1}\langle S_{n+1}\Phi, f \otimes \Psi\rangle \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \langle \phi_{\sigma(1)}, f\rangle \langle \phi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n+1)}, \Psi\rangle\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left\langle \sum_{j=1}^{n+1} \langle f, \phi_j \rangle \phi_1 \cdots \hat{\phi}_j \cdots \phi_{n+1}, \Psi \right\rangle.$$

ここで，右辺の和における記号 $\hat{\phi}_j$ は ϕ_j を除くことを意味する．したがって，

$$A_n(f)\phi_1 \cdots \phi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \langle f, \phi_j \rangle \phi_1 \cdots \hat{\phi}_j \cdots \phi_{n+1} \tag{4.7}$$

を得る．

作用素 $A_n(f)$ の共役作用素 $A_n(f)^*$ は $\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ から $\overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ への有界作用素であり，(4.6) から，

$$A_n(f)^* \Psi = \sqrt{n+1} S_{n+1}(f \otimes \Psi), \quad \Psi \in \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \tag{4.8}$$

が成立する．したがって，特に，任意の $\psi_j \in \mathscr{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，

$$A_n(f)^* \psi_1 \cdots \psi_n = \sqrt{n+1} f \psi_1 \cdots \psi_n \tag{4.9}$$

となる．

$$\cdots \longrightarrow \overset{n-1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \xrightarrow{A_{n-1}(f)^*} \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \xrightarrow{A_n(f)^*} \overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \xrightarrow{A_{n+1}(f)^*} \cdots.$$

$\mathscr{H}$ の各ベクトル f に対して，作用素 $A_n(f)$ を用いて，ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の作用素 $A(f)$ を次のように定義する．

$$D(A(f)) := \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n(f)\Psi^{(n+1)}\|^2 < \infty \right\}, \tag{4.10a}$$

$$(A(f)\Psi)^{(n)} = A_n(f)\Psi^{(n+1)}, \quad n \geq 0,\ \Psi \in D(A(f)). \tag{4.10b}$$

命題 3-5 (ii) の A に関する閉性の証明と全く同様にして，$A(f)$ は閉作用素であることがわかる．

また，$f \neq 0$ ならば，$A(f)$ は非有界作用素である (問題 1).

ボソンフォック空間における**有限粒子ベクトル部分空間**を

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}) := P_{\mathrm{b}} \mathscr{F}_0(\mathscr{H}) = \hat{\bigoplus_{n=0}^{\infty}} \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H} \tag{4.11}$$

によって定義する．明らかに，

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}) \subset D(A(f)) \tag{4.12}$$

であり，$A(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ を不変にする：

$$A(f)\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}). \tag{4.13}$$

より詳しく見れば，$A(f)$ は，任意の $n \geq 0$ に対して，$\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ を $\overset{n-1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ にうつす ($\overset{-1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}^{-1} := \{0\}$ とする)．これは，物理的には，$A(f)$ がボソンの個数を 1 つ減らす働きをすることを意味する．この意味で，$A(f)$ を**消滅作用素** (annihilation operator) とよぶ．

消滅作用素 $A(f)$ の共役 $A(f)^*$ については次が成り立つ：

$$D(A(f)^*) = \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n(f)^* \Psi^{(n)}\|^2 < \infty \right\}, \tag{4.14a}$$

$$(A(f)^*\Psi)^{(0)} = 0, \tag{4.14b}$$

$$(A(f)^*\Psi)^{(n)} = A_{n-1}(f)^* \Psi^{(n-1)}, \quad n \geq 1,\ \Psi \in D(A(f)^*). \tag{4.14c}$$

これは次のようにして示される．(4.14a) の右辺の集合を D_f とし，任意に $\Psi \in D_f$ をとる．このとき，$\eta := \{A_{n-1}(f)^*\Psi^{(n-1)}\}_{n=0}^{\infty}$ ($A_{-1}(f) := 0, \Psi^{(-1)} := 0$) は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ のベクトルであり，すべての $\Phi \in D(A(f))$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle \Psi, A(f)\Phi \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Psi^{(n)}, A_n(f)\Phi^{(n+1)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle A_n(f)^*\Psi^{(n)}, \Phi^{(n+1)} \rangle \\ &= \langle \eta, \Phi \rangle. \end{aligned}$$

これは，$\Psi \in D(A(f)^*)$ かつ $A(f)^*\Psi = \eta$ を意味する．したがって，$D_f \subset D(A(f)^*)$ かつ (4.14b), (4.14c) が成り立つ．

逆に，$\Psi \in D(A(f)^*)$ としよう．各 $n \geq 0$ に対して，任意のベクトル $\phi_n \in \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ をとり，$\Phi_n = \{\Phi_n^{(j)}\}_{j=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ を $\Phi_n^{(j)} = \delta_{nj}\phi_n$ $(j \geq 0)$ によって定義する．このとき，$\Phi_n \in D(A(f))$ であるから，

$$\begin{aligned} \langle A(f)^*\Psi, \Phi_n \rangle = \langle \Psi, A(f)\Phi_n \rangle &= \langle \Psi^{(n-1)}, A_{n-1}(f)\phi_n \rangle \\ &= \langle A_{n-1}(f)^*\Psi^{(n-1)}, \phi_n \rangle \\ &= \langle \Xi, \Phi_n \rangle. \end{aligned}$$

ただし，$\Xi^{(0)} := 0$, $\Xi^{(n)} := A_{n-1}^*\Psi^{(n-1)}$ $(n \geq 1)$．これから，すべての $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，$\langle A(f)^*\Psi, \Phi \rangle = \langle \Xi, \Phi \rangle$ が導かれる．$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ は稠密であるから，$\Xi =$

$A(f)^*\Psi$ が結論される．これは，(4.14a)〜(4.14c) を意味する．

(4.14a)〜(4.14c) により，

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}) \subset D(A(f)^*) \tag{4.15}$$

であり，$A(f)^*$ も $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ を不変にする：

$$A(f)^*\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}). \tag{4.16}$$

作用素 $A(f)^*$ は，任意の $n \geq 0$ に対して，$\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ を $\overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ にうつす．これは，物理的には，消滅作用素とは逆に，ボソンの個数を 1 つふやす働きを意味する．この意味で，$A(f)^*$ を**生成作用素** (creation operator) という．これも，$f \neq 0$ ならば，非有界作用素である (問題 2，問題 3)．

以下，$A(f)^\sharp$ によって，$A(f)$ または $A(f)^*$ を表す．

命題 4-3　$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ は $A(f)^\sharp$ の芯である．

証明　任意の $\Psi \in D(A(f))$ に対して，$\Psi_N \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ を $n \geq N+1$ ならば，$\Psi_N^{(n)} = 0$; $n \leq N$ ならば $\Psi_N^{(n)} = \Psi^{(n)}$ によって定義する．このとき，$\Psi_N \longrightarrow \Psi$, $A(f)\Psi_N \longrightarrow A(f)\Psi$ $(N \longrightarrow \infty)$ を確かめるのは容易である．したがって，題意がしたがう．$A(f)^*$ についても同様．□

作用素 $A(f)$ の定義から，すべての $f \in \mathscr{H}$ に対して，

$$A(f)\Omega_{\mathscr{H}} = 0 \tag{4.17}$$

が成り立つ．ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の元としての真空 $\Omega_{\mathscr{H}}$ は，実は，方程式 (4.17) によって特徴づけられる．

命題 4-4　すべての $f \in \mathscr{H}$ に対して，$A(f)\Psi = 0$ をみたすベクトル $\Psi \in D(A(f))$ は $\Omega_{\mathscr{H}}$ の定数倍に限られる．

証明　すべての $f \in \mathscr{H}$ に対して，$A(f)\Psi = 0$ とすれば，すべての $n \geq 0$ に対して，$A_n(f)\Psi^{(n+1)} = 0$．したがって，(4.6) により，すべての $\Phi \in \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ に対して，$\langle \Psi^{(n+1)}, S_{n+1}(f \otimes \Phi)\rangle = 0$．一方，$\mathscr{L}\{S_{n+1}(f \otimes \Phi) \,|\, f \in \mathscr{H}, \Phi \in \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}\}$ は $\overset{n+1}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}}\mathscr{H}$ で稠密である．したがって，$\Psi^{(n+1)} = 0$ $(n \geq 0)$．ゆえに，$\Psi = \{\Psi^{(0)}, 0, 0, \cdots\} = \Psi^{(0)}\Omega_{\mathscr{H}}$ ($\Psi^{(0)} \in \mathbb{C}$ であることに注意)．□

注意 4-1　有限個の $f_1, \cdots, f_m \in \mathscr{H}$ (ただし，$m < \dim \mathscr{H}$) に対しては，$A(f_j)\Psi = 0$ $(j = 1, \cdots, m)$ をみたすベクトル Ψ で $\Psi \neq c\Omega_{\mathscr{H}}$ (c は定数) となるものはつねに存在する．たとえば，$\mathscr{L}\{f_1, \cdots, f_m\}$ の $\mathscr{H}$ における直交補空間の任意の元を $g \neq 0$ とし，ベクトル $\Psi_g \in D(A(f))$ を $\Psi_g^{(0)} := \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$ は任意); $\Psi_g^{(n)} := g^n$ $(n = 1, \cdots, N)$, $\Psi_g^{(n)} := 0$ $(n \geq N+1)$ によって定義すれば，$\Psi_g \notin \{c\Omega_{\mathscr{H}} \,|\, c \in \mathbb{C}\}$ であり，(4.7) により，$A(f_j)\Psi_g = 0$ $(j = 1, \cdots, m)$ である．

(4.8), (4.9) から，すべての $n \in \mathbb{N}$ と $f_j \in \mathscr{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，

$$(A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}})^{(m)} = \delta_{mn}\sqrt{n!}\, f_1 \cdots f_n, \quad m \geq 1, \tag{4.18}$$

が成立する．したがって，$\mathscr{H}$ の任意の稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ に対して，

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D}) := \mathscr{L}\{\Omega_{\mathscr{H}},\, A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}} \,|\, n \in \mathbb{N},\, f_j \in \mathscr{D}, j = 1, \cdots, n\} \tag{4.19}$$

は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の稠密な部分空間である．これは，つまり，物理的には，真空に生成作用素を作用させることにより，ボソンフォック空間の "基体" が構成されることを意味する．さらに，(4.18) は，任意の $f_j, g_j \in \mathscr{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，

$$\langle A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}, A(g_1)^* \cdots A(g_n)^* \Omega_{\mathscr{H}} \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle f_1, g_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle f_n, g_{\sigma(n)} \rangle \tag{4.20}$$

を導く (問題 4 も参照).

4-3-2　交換関係

作用素 $A(f)$ と $A(g)^*$ $(f, g \in \mathscr{H})$ の間の交換関係を求めてみよう．

命題 4-5　すべての $f, g \in \mathscr{H}$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ 上で，

$$[A(f), A(g)^*] = \langle f, g \rangle, \tag{4.21a}$$

$$[A(f), A(g)] = 0, \quad [A(f)^*, A(g)^*] = 0 \tag{4.21b}$$

が成り立つ[6]．

証明　$n \geq 1$ に対して，$\boldsymbol{f} := (f_j)_{j=1}^n$ $(f_j \in \mathscr{H})$，とし，ベクトル $\Psi_n(\boldsymbol{f}) \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$

---

[6] 一般に，同一のヒルベルト空間で働く線形作用素 S, T について，ある部分空間 $D \subset D(S) \cap D(T)$ があって，すべての $\psi \in D$ に対して，$S\psi = T\psi$ が成り立つとき,「D 上で $S = T$ が成り立つ」という言い方をする．これは，作用素の等式を意味するとは限らないことに注意されたい．

を

$$\Psi_n(\boldsymbol{f})^{(m)} := \begin{cases} f_1 \cdots f_n & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

によって定義する．このとき，(4.7) によって，任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して，

$$(A(f)\Psi_n(\boldsymbol{f}))^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle f_1 \cdots \hat{f}_j \cdots f_n & (m = n-1) \\ 0 & (m \neq n-1). \end{cases} \tag{4.22}$$

また，(4.9) によって，任意の $g \in \mathscr{H}$ に対して，

$$(A(g)^* \Psi_n(\boldsymbol{f}))^{(m)} = \begin{cases} \sqrt{n+1}\, g f_1 \cdots f_n & (m = n+1) \\ 0 & (m \neq n+1). \end{cases} \tag{4.23}$$

したがって，

$$(A(f)A(g)^*\Psi_n(\boldsymbol{f}))^{(n)} = \langle f, g \rangle f_1 \cdots f_n + \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle g f_1 \cdots \hat{f}_j \cdots f_n,$$

$$(A(g)^* A(f)\Psi_n(\boldsymbol{f}))^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle g f_1 \cdots \hat{f}_j \cdots f_n.$$

したがって，

$$([A(f), A(g)^*]\Psi_n(\boldsymbol{f}))^{(n)} = \langle f, g \rangle \Psi_n(\boldsymbol{f})^{(n)}.$$

$m \neq n$ ならば，$(A(f)A(g)^*\Psi_n(\boldsymbol{f}))^{(m)} = 0$, $(A(g)^* A(f)\Psi_n(\boldsymbol{f}))^{(m)} = 0$ であるから，

$$[A(f), A(g)^*]\Psi_n(\boldsymbol{f}) = \langle f, g \rangle \Psi_n(\boldsymbol{f})$$

が得られる．また，

$$[A(f), A(g)^*]\Omega_{\mathscr{H}} = \langle f, g \rangle \Omega_{\mathscr{H}}$$

は容易にわかる．これらの結果は，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{H})$ に対して，

$$[A(f), A(g)^*]\Psi = \langle f, g \rangle \Psi \tag{4.24}$$

を意味する (Ψ は，$\Omega_{\mathscr{H}}$ および $\Psi_n(\boldsymbol{f})$ の型のベクトル ($n = 1, 2, \cdots, f_j \in \mathscr{H}$) の線形結合で表されることに注意)．任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対しては，$\Psi_N \longrightarrow \Psi$ ($N \longrightarrow \infty$) となる $\Psi_N \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{H})$ がとれる．(4.24) により，

$$A(f)A(g)^*\Psi_N - A(g)^*A(f)\Psi_N = \langle f,g\rangle\Psi_N.$$

ある番号 k があって，$n \geq k+1$ ならば，$\Psi^{(n)} = 0$ である．したがって，$\Psi_N \in \bigoplus_{n=0}^{k} \bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H}$ としてよい．生成・消滅作用素の定義から，自然な仕方で，$A(f)$, $A(g)^*$ は $\bigoplus_{n=0}^{k} \bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H}$ から $\bigoplus_{n=0}^{k+1} \bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H}$ への有界線形作用素とみることができる．したがって，

$$A(f)A(g)^*\Psi_N \longrightarrow A(f)A(g)^*\Psi, \quad A(g)^*A(f)\Psi_N \longrightarrow A(g)^*A(f)\Psi,$$
$$(N \longrightarrow \infty).$$

ゆえに，すべての $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，(4.24) が成立する．すなわち，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ 上で (4.21a) が成り立つ．(4.21b) についても同様． □

生成作用素と消滅作用素がしたがう特徴的な交換関係 (4.21a), (4.21b) を**ハイゼンベルク型正準交換関係** (canonical commutaiton relations (CCR) of Heisenberg's form) あるいは単に**正準交換関係** (CCR) とよぶ．

例 4-2 例 4-1 のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(M,d\mu))$ の場合の $A(f)$ と $A(f)^*$ の作用がどういう形をとるかを見ておこう．任意の $f \in L^2(M,d\mu)$, $\Phi, \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(M,d\mu))$ に対して ($\bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} L^2(M,d\mu) = L^2_{\mathrm{sym}}(M^n, d\mu^n)$ という自然な同一視を用いる)，

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi^{(n+1)}, S_{n+1}(f\otimes\Psi^{(n)})\rangle \\
&= \int_{M^{n+1}} \Phi^{(n+1)}(m_1,\cdots,m_{n+1})^* f(m_1)\Psi^{(n)}(m_2,\cdots,m_{n+1}) \\
&\qquad \times d\mu(m_1)\cdots d\mu(m_{n+1}) \\
&= \int_{M^n} \left(\int_M f(m)^*\Phi^{(n+1)}(m,m_1,\cdots,m_n)d\mu(m)\right)^* \Psi^{(n)}(m_1,\cdots,m_n) \\
&\qquad \times d\mu(m_1)\cdots d\mu(m_n).
\end{aligned}$$

ここで，積分の順序交換に対して，フビニの定理を応用した．これと (4.6) により，任意の $\Phi \in D(A(f))$ に対して，

$$(A(f)\Phi)^{(n)}(m_1,\cdots,m_n) = \sqrt{n+1}\int_M f(m)^*\Phi^{(n+1)}(m,m_1,\cdots,m_n)\,d\mu(m),$$
$$n \geq 0 \tag{4.25}$$

が得られる．

生成作用素については，まず，(4.14b), (4.14c), (4.8) によって，任意の $\Psi \in D(A(f)^*)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&(A(f)^*\Psi)^{(n+1)}(m_1, \cdots, m_{n+1}) \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} f(m_{\sigma(1)}) \Psi^{(n)}(m_{\sigma(2)}, \cdots, m_{\sigma(n+1)}).
\end{aligned}
$$

一方，$\Psi^{(n)} \in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^n)$ であるから，右辺は，

$$
\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} f(m_j) \Psi^{(n)}(m_1, \cdots, \hat{m}_j, \cdots, m_{n+1})
$$

と書き直せる．したがって，

$$
\begin{aligned}
&(A(f)^*\Psi)^{(n+1)}(m_1, \cdots, m_{n+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} f(m_j) \Psi^{(n)}(m_1, \cdots, \hat{m}_j, \cdots, m_{n+1}), \quad n \geq 0. \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

4-3-3　既約性

$\mathscr{X}$ をヒルベルト空間，$\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ を $\mathscr{X}$ 上の線形作用素の 1 つの集合とする (S は添字集合)．$\mathscr{X}$ の部分空間 $\mathscr{M}$ で条件 $\mathscr{M} \subset \bigcap_{\alpha \in S} D(A_\alpha)$ をみたすものがあるとする．このとき，任意の $\psi \in \mathscr{M}$ に対して，$T\psi \in \bigcap_{\alpha \in S} D(A_\alpha)$ かつ $TA_\alpha\psi = A_\alpha T\psi$ をみたす，$\mathscr{X}$ 上の有界線形作用素 $T \in \mathfrak{B}(\mathscr{X})$ が恒等作用素のスカラー倍に限られるならば，$\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ は $\mathscr{M}$ 上で**既約** (irreducible) であるという．

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ が $\mathscr{X}$ 上の有界線形作用素の部分集合で $\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ が $\mathscr{X}$ 上で既約のとき，$\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ は単に既約であるという．

命題 4-6　$\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間とする．このとき，$\{A(f), A(f)^* \mid f \in \mathscr{D}\}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ 上で既約である．

証明　容易にわかるように，各 $A(f)^\sharp$ $(f \in \mathscr{D})$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ を不変にする．有界作用素 $T \in \mathfrak{B}(\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}))$ が任意の $A(f)^\sharp$ と $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ に対して，$T\Psi \in \bigcap_{f \in \mathscr{D}} D(A(f)^\sharp)$ かつ $TA(f)^\sharp\Psi = A(f)^\sharp T\Psi$ をみたすとしよう．いま，

$$
\Psi(f_1, \cdots, f_n) := A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}, \quad f_j \in \mathscr{D},
$$

とおく．このとき，$\Psi(f_1,\cdots,f_n)\in\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ であり，任意の $g_1,\cdots,g_m\in\mathscr{D}$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\Psi(g_1,\cdots,g_m),T\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle&=\langle\Psi(g_1,\cdots,g_m),A(f_1)^*\cdots A(f_n)^*T\Omega_{\mathscr{H}}\rangle\\&=\langle A(f_n)\cdots A(f_1)\Psi(g_1,\cdots,g_m),T\Omega_{\mathscr{H}}\rangle.\end{aligned}$$

$n>m$ ならば，CCR と (4.17) により，$A(f_n)\cdots A(f_1)\Psi(g_1,\cdots,g_m)=0$．したがって，

$$\langle\Psi(g_1,\cdots,g_m),T\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle=0.$$

$n=m$ ならば，CCR を繰り返し使うことにより，

$$A(f_n)\cdots A(f_1)\Psi(g_1,\cdots,g_n)=c\Omega_{\mathscr{H}}$$

となる．ここで，c は，$f_1,\cdots,f_n$, $g_1,\cdots,g_n$ に依存する定数である．$\Omega_{\mathscr{H}}$ との内積をとれば，

$$c^*=\langle\Psi(g_1,\cdots,g_n),\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle$$

と表される．したがって，

$$\begin{aligned}\langle\Psi(g_1,\cdots,g_n),T\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle&=c^*\langle\Omega_{\mathscr{H}},T\Omega_{\mathscr{H}}\rangle\\&=\langle\Omega_{\mathscr{H}},T\Omega_{\mathscr{H}}\rangle\langle\Psi(g_1,\cdots,g_n),\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle.\end{aligned}$$

$n<m$ のときは，

$$\langle\Psi(g_1,\cdots,g_m),T\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle=\langle\Omega_{\mathscr{H}},TA(g_1)^*\cdots A(g_m)^*\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle$$

と変形し，$A(g_1)^*\cdots A(g_m)^*\Psi(f_1,\cdots,f_n)=0$ であることに注意すれば，

$$\langle\Psi(g_1,\cdots,g_m),T\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle=0.$$

よって，任意の m,n に対して，

$$\langle\Psi(g_1,\cdots,g_m),T\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle=\langle\Omega_{\mathscr{H}},T\Omega_{\mathscr{H}}\rangle\langle\Psi(g_1,\cdots,g_m),\Psi(f_1,\cdots,f_n)\rangle.$$

$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ は稠密であるから，

$$T\Psi(f_1,\cdots,f_n)=\langle\Omega_{\mathscr{H}},T\Omega_{\mathscr{H}}\rangle\Psi(f_1,\cdots,f_n).$$

$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ は稠密であり，T は有界であるから，$T=\langle\Omega_{\mathscr{H}},T\Omega_{\mathscr{H}}\rangle I$，すなわち，恒等作用素のスカラー倍である． □

4-4 節　第 2 量子化作用素

3 章において，全フォック空間上の第 2 量子化作用素なる対象が定義された．この作用素は，その定義域をボソンフォック空間の中に制限することにより，ボソンフォック空間上で働く作用素になりうる．このことを厳密に考察するために，まず，作用素の簡約の概念を復習しておく．

4-4-1　線形作用素の簡約

$\mathscr{X}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{M}$ を $\mathscr{X}$ の閉部分空間，A を $\mathscr{X}$ 上の線形作用素とする．$P_{\mathscr{M}}$ を $\mathscr{M}$ への正射影作用素としよう．もし，すべての $\Psi \in D(A)$ に対して，$P_{\mathscr{M}}\Psi \in D(A)$ であって，かつ

$$AP_{\mathscr{M}}\Psi = P_{\mathscr{M}}A\Psi \tag{4.27}$$

が成り立つならば，$\mathscr{M}$ は A を**簡約する** (reduce) という．これは，簡潔に述べれば，

$$P_{\mathscr{M}}A \subset AP_{\mathscr{M}} \tag{4.28}$$

ということである．この場合，$\Psi \in D(A) \cap \mathscr{M}$ ならば，$P_{\mathscr{M}}\Psi = \Psi$ であるから，(4.27) は $A\Psi \in \mathscr{M}$ を意味する．すなわち，

$$A\,(D(A) \cap \mathscr{M}) \subset \mathscr{M}. \tag{4.29}$$

したがって，$\mathscr{M}$ 上の線形作用素 $A_{\mathscr{M}}$ を次のように定義することができる：

$$D(A_{\mathscr{M}}) := D(A) \cap \mathscr{M}, \tag{4.30a}$$

$$A_{\mathscr{M}}\Psi := A\Psi, \quad \Psi \in D(A_{\mathscr{M}}). \tag{4.30b}$$

作用素 $A_{\mathscr{M}}$ を A の $\mathscr{M}$ における**簡約部分** (reduced part) という．さらに，$P_{\mathscr{M}} = I - P_{\mathscr{M}^\perp}$ に注意すれば，(4.28) は

$$P_{\mathscr{M}^\perp}A \subset AP_{\mathscr{M}^\perp} \tag{4.31}$$

を意味する．したがって，$\mathscr{M}$ が A を簡約すれば，$\mathscr{M}^\perp$ も A を簡約する．特に，(4.29) と同様に，

$$A(D(A) \cap \mathscr{M}^\perp) \subset \mathscr{M}^\perp. \tag{4.32}$$

命題 4-7　$\mathscr{M}$ は A を簡約するとしよう．このとき，直和分解 $\mathscr{X} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$ に応じて，A は

$$A = A_{\mathscr{M}} \oplus A_{\mathscr{M}^\perp} \tag{4.33}$$

と直和分解される.

証明 $\Psi \in D(A)$ とすれば, $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ と直和分解される. ただし, $\Psi_1 = P_{\mathscr{M}}\Psi$, $\Psi_2 = P_{\mathscr{M}^\perp}\Psi$. 仮定により, $\Psi_1 \in D(A) \cap \mathscr{M}$, $\Psi_2 \in D(A) \cap \mathscr{M}^\perp$ であり, $A\Psi_1 = A_{\mathscr{M}}\Psi_1$, $A\Psi_2 = A_{\mathscr{M}^\perp}\Psi_2$. したがって, $A\Psi = A_{\mathscr{M}}\Psi_1 + A_{\mathscr{M}^\perp}\Psi_2$. ゆえに, $A \subset A_{\mathscr{M}} \oplus A_{\mathscr{M}^\perp}$. 逆に, $A_{\mathscr{M}} \oplus A_{\mathscr{M}^\perp} \subset A$ は容易にわかる. したがって, (4.33) が成立する. □

注意 4-2 $\mathscr{M}$ が線形作用素 A を簡約すれば, (4.29), (4.32) の意味で, A は $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}^\perp$ を不変にする. だが, A が非有界作用素の場合, この逆は一般には成立しない. つまり, A が (4.29), (4.32) をみたしても, $\mathscr{M}$ は A を簡約するとは限らないのである. 非有界作用素を扱う場合, この点は特に注意を要する (有界作用素の場合については, 次の命題 4-8 を参照). 参考のために, 反例を 1 つあげておこう.

反例 ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ において, 微分作用素 $\hat{D}_0 = d/dx$ を考える : $D(\hat{D}_0) := C_0^1(\mathbb{R})$, $(\hat{D}_0 f)(x) := f'(x)$. 部分空間 $\mathscr{M} := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{supp}\, f \subset [0,1]\}$ は閉であり, $\mathscr{M}^\perp := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{supp}\, f \subset (-\infty, 0) \cup (1, \infty)\}$. この場合, 明らかに, $A = \hat{D}_0$ は (4.29), (4.32) をみたす. 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $P_{\mathscr{M}} f = \chi_{[0,1]} f$ である ($\chi_{[0,1]}$ は区間 $[0,1]$ の定義関数). そこで, たとえば, $[0,1]$ 上で 1 に等しい関数 $f \in C_0^1(\mathbb{R})$ をとると, $f \in D(\hat{D}_0)$ であるが, $\chi_{[0,1]} f \notin D(\hat{D}_0)$ である. 実際, 仮に, $\chi_{[0,1]} f \in D(\hat{D}_0)$ とすれば, ある $g \in C_0^1(\mathbb{R})$ があって, $\chi_{[0,1]}(x) f(x) = g(x)$, a.e.$x \in \mathbb{R}$ ($L^2(\mathbb{R})$ の元は関数のそのものではなく, 関数の同値類であることに注意). したがって, $g(x) = 0$, a.e.$x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$; $g(x) = 1$, a.e.$x \in [0,1]$. しかし, g は連続であるから, 実は $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$; $g(x) = 1$, $x \in [0,1]$ となる[7]. だが, これは, g が $x = 0, 1$ で不連続であることを意味し, 矛盾である. よって, $P_{\mathscr{M}} f \notin D(\hat{D}_0)$. ゆえに, $\mathscr{M}$ は $\hat{D}_0$ を簡約しない.

命題 4-8 作用素 A を $\mathscr{X}$ 全体を定義域とする有界作用素とする. このとき, $\mathscr{M}$ が A を簡約するための必要十分条件は $A\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$ かつ $A\mathscr{M}^\perp \subset \mathscr{M}^\perp$ が成立することでである.

---

[7] $\mathbb{R}^d$ の開集合 J 上で定義された 2 つの連続関数 f, g がルベーグ測度に関して, $f(x) = g(x)$, a.e.$x \in J$ をみたせば, すべての $x \in J$ に対して $f(x) = g(x)$ である.

証明　必要性についてはすでに見た．十分性を示すために，$A\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$ かつ $A\mathscr{M}^\perp \subset \mathscr{M}^\perp$ としよう．このとき，任意の $\Psi \in \mathscr{X}$ に対して成り立つ式 $A\Psi = AP_{\mathscr{M}}\Psi + AP_{\mathscr{M}^\perp}\Psi$ は $A\Psi$ の $\mathscr{M}$ に関する直和分解をあたえるから，$P_{\mathscr{M}}A\Psi = AP_{\mathscr{M}}\Psi$, $P_{\mathscr{M}^\perp}A\Psi = AP_{\mathscr{M}^\perp}\Psi$ でなければならない．したがって，A は $\mathscr{M}$ によって簡約される．　□

命題 4-9　A を閉作用素とし，閉部分空間 $\mathscr{M}$ は A を簡約するとする．このとき，任意の $z \in \varrho(A)$ に対して，$(A-z)^{-1}$ は $\mathscr{M}$ によって簡約され，その簡約部分は $(A_{\mathscr{M}} - z)^{-1}$ に等しい．

証明　任意の $\Psi \in \mathscr{X}$ に対して，$(A-z)\Phi = \Psi$ となる $\Phi \in D(A)$ がある．両辺に $P_{\mathscr{M}}$ を作用させ，A の簡約性を使うと，$(A-z)P_{\mathscr{M}}\Phi = P_{\mathscr{M}}\Psi$．したがって，$(A-z)^{-1}P_{\mathscr{M}}\Psi = P_{\mathscr{M}}\Phi = P_{\mathscr{M}}(A-z)^{-1}\Psi$．これから，命題の主張が得られる．　□

閉部分空間によって簡約される線形作用素の簡約部分はもとの作用素の性質を引き継ぐ：

命題 4-10　閉部分空間 $\mathscr{M}$ は A を簡約するとする．

(i)　$D(A)$ が稠密ならば，$D(A_{\mathscr{M}})$ は $\mathscr{M}$ で稠密である．

(ii)　A が単射ならば，$A_{\mathscr{M}}$ も単射である．

(iii)　A が全射ならば，$A_{\mathscr{M}}$ も全射である．

(iv)　A が閉ならば，$A_{\mathscr{M}}$ も閉である．さらに，部分空間 $\mathscr{D} \subset \mathscr{X}$ が A の芯ならば，$P_{\mathscr{M}}\mathscr{D}$ は $A_{\mathscr{M}}$ の芯である．

(v)　A が有界ならば，$A_{\mathscr{M}}$ も有界であり，$\|A_{\mathscr{M}}\| \le \|A\|$．

(vi)　A が対称ならば，$A_{\mathscr{M}}$ も対称である．

(vii)　A が正射影作用素ならば，$A_{\mathscr{M}}$ も正射影作用素である．

(viii)　A が自己共役ならば，$A_{\mathscr{M}}$ も自己共役である．この場合，A のスペクトル測度を E とすれば，これも $\mathscr{M}$ によって簡約され，その簡約部分 $E_{\mathscr{M}}$ は $A_{\mathscr{M}}$ のスペクトル測度をあたえる．

(ix)　A がユニタリならば，$A_{\mathscr{M}}$ もユニタリである．

(x)　A が縮小作用素ならば，$A_{\mathscr{M}}$ も縮小作用素である．

(xi)　A は自己共役であるとし，B を A と強可換な自己共役作用素で $\mathscr{M}$ によって簡約されるものとすれば，$A_{\mathscr{M}}$ と $B_{\mathscr{M}}$ は強可換である．

証明　(i) 任意の $\Psi \in \mathscr{M}$ に対して，$\Psi = P_{\mathscr{M}}\Phi$ をみたす $\Phi \in \mathscr{X}$ がある．$D(A)$ の

稠密性により，$\Phi_n \longrightarrow \Phi$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる $\Phi_n \in D(A)$ がある．このとき，$\Xi_n := P_{\mathscr{M}}\Phi_n \in D(A_{\mathscr{M}})$ であり，$\Xi_n \longrightarrow P_{\mathscr{M}}\Phi = \Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．したがって，$D(A_{\mathscr{M}})$ は $\mathscr{M}$ で稠密である．

(ii) $\Psi \in D(A_{\mathscr{M}})$ について，$A_{\mathscr{M}}\Psi = 0$ が成り立つとすれば，$A\Psi = 0$．したがって，$\Psi = 0$．ゆえに，$A_{\mathscr{M}}$ は単射である．

(iii) $\Psi \in \mathscr{M}$ としよう．このとき，仮定により，$A\Phi = \Psi$ となる $\Phi \in D(A)$ がある．両辺に $P_{\mathscr{M}}$ を作用させて，A の簡約性を用いると，$A_{\mathscr{M}}P_{\mathscr{M}}\Phi = \Psi$．したがって，$A_{\mathscr{M}}$ は全射である．

(iv) $\Psi_n \in D(A_{\mathscr{M}}), \Psi_n \longrightarrow \Psi \in \mathscr{M}, A_{\mathscr{M}}\Psi_n \longrightarrow \Phi \in \mathscr{M}$ $(n \longrightarrow \infty)$ とすれば，$\Psi_n \in D(A)$ かつ $A\Psi_n \longrightarrow \Phi$ $(n \longrightarrow \infty)$．したがって，$A$ の閉性により，$\Psi \in D(A)$ かつ $A\Psi = \Phi$．ゆえに，$\Psi \in \mathscr{M} \cap D(A) = D(A_{\mathscr{M}})$ かつ $A_{\mathscr{M}}\Psi = \Phi$．ゆえに $A_{\mathscr{M}}$ は閉である．

任意の $\Psi \in D(A_{\mathscr{M}})$ に対して，$\Psi \in D(A)$ であるから，$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ で $\Psi_n \longrightarrow \Psi$, $A\Psi_n \longrightarrow A\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ となるものがある．したがって，$\Phi_n = P_{\mathscr{M}}\Psi_n$ とおけば，$\Phi_n \in P_{\mathscr{M}}\mathscr{D}$ であり，$\Phi_n \longrightarrow P_{\mathscr{M}}\Psi = \Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ かつ $P_{\mathscr{M}}A\Psi_n \longrightarrow P_{\mathscr{M}}A\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．一方，$P_{\mathscr{M}}A\Psi_n = AP_{\mathscr{M}}\Psi_n = A\Phi_n, P_{\mathscr{M}}A\Psi = AP_{\mathscr{M}}\Psi = A_{\mathscr{M}}\Psi$ であるから，$A_{\mathscr{M}}\Phi_n \longrightarrow A_{\mathscr{M}}\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．したがって，$P_{\mathscr{M}}\mathscr{D}$ は $A_{\mathscr{M}}$ の芯である．

(v) この場合，任意の $\Psi \in D(A_{\mathscr{M}})$ に対して，$\|A_{\mathscr{M}}\Psi\| = \|A\Psi\| \leq \|A\|\|\Psi\|$．したがって，$A_{\mathscr{M}}$ は有界であり，$\|A_{\mathscr{M}}\| \leq \|A\|$.

(vi) A のエルミート性と (i) による．

(vii) $A^2 = A$ は，$A_{\mathscr{M}}^2 = A_{\mathscr{M}}$ を意味する．$A_{\mathscr{M}}^* = A_{\mathscr{M}}$ は (vi) による．

(viii) A の自己共役性により，$A \pm i$ は全射である．$A \pm i$ も $\mathscr{M}$ によって簡約され，その簡約部分は $A_{\mathscr{M}} \pm i$ である．したがって，(iii) によって，$A_{\mathscr{M}} \pm i$ は全射である．ゆえに，$A_{\mathscr{M}}$ は自己共役である．

命題 4-9 によって，A のレゾルヴェントは $\mathscr{M}$ によって簡約される．他方，A のスペクトル測度 E は，A のレゾルヴェントを用いて表現される (ストーンの公式)[8]．したがって，$\mathscr{M}$ は E を簡約する．E の簡約部分 $E_{\mathscr{M}}$ が $\mathscr{M}$ 上で作用するスペクトル測度になることは容易に確かめられる．任意の $\Psi \in D(A_{\mathscr{M}})$ と $\Phi \in \mathscr{M}$ に対して，

$$\langle \Phi, A_{\mathscr{M}}\Psi \rangle = \langle \Phi, A\Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\langle \Phi, E(\lambda)\Psi \rangle$$

[8] 新井 (1997a) の定理 4.8，(4.16) を参照．

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\langle \Phi, E_{\mathscr{M}}(\lambda)\Psi\rangle.$$

したがって，スペクトル定理にいう一意性により，$E_{\mathscr{M}}$ は $A_{\mathscr{M}}$ のスペクトル測度である．

(ix) A をユニタリとすれば，$A_{\mathscr{M}}$ の全射性は (iii) による．内積保存性は A のそれから容易に導かれる．ゆえに，$A_{\mathscr{M}}$ はユニタリである．

(x) (v) の単純な応用である．

(xi) 仮定と命題 2-16 により，任意の $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，

$$(A - z)^{-1}(B - w)^{-1} = (B - w)^{-1}(A - z)^{-1}.$$

この等式を $\mathscr{M}$ に制限すれば，A, B をそれぞれ，$A_{\mathscr{M}}, B_{\mathscr{M}}$ で置き換えた式が成り立つ．したがって，ふたたび，命題 2-16 により，$A_{\mathscr{M}}$ と $B_{\mathscr{M}}$ は強可換である．□

4-4-2　第 2 量子化作用素

再び，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ へとうつろう．T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．

命題 4-11　各 $n \geq 2$ に対して，$\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ は，(3.17) によって定義される閉作用素 $T^{(n)}$ を簡約する．

証明　$\Psi \in D(T^{(n)}) \subset \mathscr{H}^{(n)} = \overset{n}{\otimes} \mathscr{H}$ とする．このとき，作用素のテンソル積の定義により，$\Psi_N \in \overset{n}{\hat{\otimes}} D(T)$ で，$\Psi_N \longrightarrow \Psi$, $T^{(n)}\Psi_N \longrightarrow T^{(n)}\Psi$ $(N \longrightarrow \infty)$ となるものが存在する．したがって，$S_n\Psi_N \longrightarrow S_n\Psi$, $S_nT^{(n)}\Psi_N \longrightarrow S_nT^{(n)}\Psi$ $(N \longrightarrow \infty)$．一方，$S_nT^{(n)}\Psi_N = T^{(n)}S_n\Psi_N$．したがって，$T^{(n)}$ の閉性により，$S_n\Psi \in D(T^{(n)})$ かつ $T^{(n)}S_n\Psi = S_nT^{(n)}\Psi$．ゆえに，題意が成立する．□

閉作用素 $T^{(n)}$ の $\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$ における簡約部分を $T_{\mathrm{b}}^{(n)}$ と記す：

$$T_{\mathrm{b}}^{(n)} := T^{(n)}{}_{\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}}, \quad n \geq 2. \tag{4.34}$$

便宜上，$T_{\mathrm{b}}^{(0)} := 0$, $T_{\mathrm{b}}^{(1)} := T$ とおく．命題 4-10 (iv) により，$T_{\mathrm{b}}^{(n)}$ は閉である．

命題 4-12　T は自己共役であるとする．このとき，各 $T_{\mathrm{b}}^{(n)}$ は自己共役であり，次の (i)〜(iii) が成り立つ．

(i)

$$\sigma(T_{\mathrm{b}}^{(n)}) = \overline{\left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \;\middle|\; \lambda_j \in \sigma(T),\, j = 1, \cdots, n \right\}}. \tag{4.35}$$

(ii)

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T_{\mathrm{b}}^{(n)}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \;\middle|\; \lambda_j \in \sigma_{\mathrm{p}}(T),\, j = 1, \cdots, n \right\}. \tag{4.36}$$

(iii) m を自然数とし，D を T^m の芯とする．このとき，$S_n\left(\hat{\otimes}^n D\right)$ は $(T_{\mathrm{b}}^{(n)})^m$ の芯である．

証明 $T_{\mathrm{b}}^{(n)}$ の自己共役性は，$T^{(n)}$ の自己共役性と命題 4-11，命題 4-10 (viii) による．

(i) (4.35) の右辺の集合を Σ とすれば，$\Sigma = \sigma(T^{(n)})$ であることはすでに見た ((3.21))．したがって，命題 4-7 と命題 3-5 (ii) によって，$\sigma(T_{\mathrm{b}}^{(n)}) \subset \Sigma$．この逆の包含関係を示すために，$\lambda_j \in \sigma(T)$ $(j = 1, \cdots, n)$ としよう．これらの点のうち，たがいに異なるものを $\mu_1, \cdots, \mu_s$ とし，μ_k に等しい λ_j の個数を n_k とする．したがって，$n_1 + \cdots + n_s = n$．$\mu_k \in \sigma(T)$ であるから，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$E_T((\mu_k - 1/N, \mu_k + 1/N)) \neq 0$ (E_T は T のスペクトル測度)．したがって，$\phi_{k,N} := E_T((\mu_k - 1/N, \mu_k + 1/N))\psi_N \neq 0$ をみたす $\psi_N \in \mathscr{H}$ がある．したがって，$\psi_{k,N} := \phi_{k,N}/\|\phi_{k,N}\|$ とおけば，$\|\psi_{k,N}\| = 1$, $\|(T - \mu_k)\psi_{k,N}\| \longrightarrow 0$ $(N \longrightarrow \infty)$．また，$N \geq N_0$ ならば，$\psi_{k,N} \perp \psi_{k',N}$ $(k \neq k')$ となる番号 N_0 がとれる．そこで，

$$\Psi_N := \sqrt{\frac{n!}{n_1! \cdots n_s!}}\, \psi_{1,N}^{n_1} \cdots \psi_{s,N}^{n_s}$$

とすれば，任意の $N \geq N_0$ に対して，$\|\Psi_N\| = 1$ であり，$\Psi_N \in D(T_{\mathrm{b}}^{(n)})$．さらに，

$$\left\| \left(T_{\mathrm{b}}^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) \Psi_N \right\| \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty$$

が成立することがわかる．したがって，$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \in \sigma(T_{\mathrm{b}}^{(n)})$．ゆえに，$\Sigma \subset \sigma(T_{\mathrm{b}}^{(n)})$．

(ii) (4.36) の右辺の集合を Σ' とする．$\lambda_j \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ とすれば，$T\psi_j = \lambda_j \psi_j$ をみたす $\psi_j \in D(T)$ $(\psi_j \neq 0)$ がある．T のエルミート性により，$\lambda_j \neq \lambda_k$ ならば，$\langle \psi_j, \psi_k \rangle = 0$ である．$\lambda_j = \lambda_k$ となる j, k に対するベクトル ψ_j, ψ_k たちについては，グラム-シュミットの直交化を行うことができる．したがって，$\{\psi_j\}_{j=1}^n$ が正規直交系をなすように ψ_j $(j = 1, \cdots, n)$ をとれる．そこで，

$$\Psi := \psi_1 \cdots \psi_n \tag{$*$}$$

とすれば，$\|\Psi\|^2 = (1/n!) \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \langle\psi_1, \psi_{\sigma(1)}\rangle \cdots \langle\psi_n, \psi_{\sigma(n)}\rangle = 1/n! \neq 0$ $(\Psi \in D(T_{\rm b}^{(n)}))$ かつ $T_{\rm b}^{(n)}\Psi = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\right)\Psi$ が成立する．したがって，$\sum_{j=1}^n \lambda_j \in \sigma_{\rm p}(T_{\rm b}^{(n)})$．ゆえに，$\Sigma' \subset \sigma_{\rm p}(T_{\rm b}^{(n)})$．

逆の包含関係を示すために，$\lambda \in \sigma_{\rm p}(T_{\rm b}^{(n)})$ とする．このとき，$\lambda \in \sigma_{\rm p}(T^{(n)})$ であるから，定理 2-29，(2.48) を応用すれば，$\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ となる $\lambda_j \in \sigma_{\rm p}(T)$ がある．したがって，$\sigma_{\rm p}(T_{\rm b}^{(n)}) \subset \Sigma'$．ゆえに，(4.36) が得られる．

(iii) 定理 2-25 と命題 4-10 (iv) の応用による．　□

命題 4-13　T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．

(i)　ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$ は $d\Gamma(T)$ を簡約する．

(ii)　$d\Gamma(T)$ の $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$ における簡約部分を $d\Gamma_{\rm b}(T)$ としよう：

$$d\Gamma_{\rm b}(T) := d\Gamma(T)_{\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})}. \tag{4.37a}$$

このとき，

$$d\Gamma_{\rm b}(T) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_{\rm b}^{(n)} \tag{4.37b}$$

が成り立つ．

(iii)　T が自己共役で，$\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ が T^p の芯ならば (p は任意に固定された自然数)，$\mathscr{F}_{\rm b,fin}(\mathscr{D})$ は $d\Gamma_{\rm b}(T)^p$ の芯である．

証明　(i) $\Psi \in D(d\Gamma(T))$ とする．各 $N \in \mathbb{N}$ に対して，ベクトル Ψ_N を $\Psi_N^{(n)} = \Psi^{(n)}$ $(n \leq N)$, $\Psi_N^{(n)} = 0$ $(n \geq N+1)$ によって定義すれば，$\Psi_N \in D(d\Gamma(T))$ であり，$\Psi_N \longrightarrow \Psi$, $d\Gamma(T)\Psi_N \longrightarrow d\Gamma(T)\Psi$ $(N \longrightarrow \infty)$．したがって，$P_{\rm b}\Psi_N \longrightarrow P_{\rm b}\Psi$, $P_{\rm b}d\Gamma(T)\Psi_N \longrightarrow P_{\rm b}\, d\Gamma(T)\Psi$ $(N \longrightarrow \infty)$．一方，命題 4-11 により，$n \leq N$ ならば，

$$(P_{\rm b}\, d\Gamma(T)\Psi_N)^{(n)} = S_n T^{(n)} \Psi_N^{(n)} = T^{(n)} S_n \Psi_N^{(n)} = (d\Gamma(T) P_{\rm b} \Psi_N)^{(n)}.$$

$n \geq N+1$ ならば，両辺ともに 0 である．したがって，$P_{\rm b}\, d\Gamma(T)\Psi_N = d\Gamma(T)P_{\rm b}\Psi_N$．したがって，$d\Gamma(T)P_{\rm b}\Psi_N \longrightarrow P_{\rm b}\, d\Gamma(T)\Psi$ $(N \longrightarrow \infty)$．$d\Gamma(T)$ の閉性により，

$$P_{\rm b}\Psi \in D(d\Gamma(T)) \text{ かつ } d\Gamma(T)P_{\rm b}\Psi = P_{\rm b}\, d\Gamma(T)\Psi \tag{$*$}$$

が結論される．ゆえに，$\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$ は $d\Gamma(T)$ を簡約する．

(ii) (∗) と命題 4-11 による.

(iii) 命題 3-10 (iv) と命題 4-10 (iv) による ($P_{\rm b}\mathscr{F}_{\rm fin}(\mathscr{D}) = \mathscr{F}_{\rm b,fin}(\mathscr{D})$ に注意). □

作用素 $d\Gamma_{\rm b}(T)$ を, 作用素 T に関する, ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$ 上の**第 2 量子化作用素**という.

T が自己共役の場合における $d\Gamma_{\rm b}(T)$ の基本的性質を次の定理に述べる.

定理 4-14 T は自己共役であるとする. このとき：

(i) $d\Gamma_{\rm b}(T)$ は自己共役である.

(ii) スペクトルについて, 次が成り立つ.

$$\sigma(d\Gamma_{\rm b}(T)) = \{0\} \cup \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \;\middle|\; \lambda_j \in \sigma(T),\, j=1,\cdots,n\right\}\right)}, \tag{4.38}$$

$$\sigma_{\rm p}(d\Gamma_{\rm b}(T)) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \;\middle|\; \lambda_j \in \sigma_{\rm p}(T),\, j=1,\cdots,n\right\}\right). \tag{4.39}$$

(iii) $T \geq 0$ ならば, $d\Gamma_{\rm b}(T) \geq 0$.

(iv) $\sigma(T)\cap(-\infty,0) \neq \varnothing$ ならば, $d\Gamma_{\rm b}(T)$ は下に有界ではない.

証明 (i) これは命題 4-10 (viii) と命題 3-10 による.

(ii) (4.38) は (4.35), 定理 3-7 (i) による. (4.39) は (4.36), 命題 3-5 (ii), (3.6) の応用から得られる.

(iii) $T \geq 0$ ならば, 任意の $\lambda \in \sigma(T)$ に対して, $\lambda \geq 0$. これと (4.38) から $d\Gamma_{\rm b}(T) \geq 0$ がしたがう[9].

(iv) $\lambda \in \sigma(T)\cap(-\infty,0)$ とすれば, (4.38) により, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n\lambda \in \sigma(d\Gamma_{\rm b}(T))$. $n\lambda \longrightarrow -\infty$ $(n \longrightarrow \infty)$ であるから, $d\Gamma_{\rm b}(T)$ は下に有界ではない. □

例 4-3 例 4-1 のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(M,d\mu))$ を考える. F を M 上の実数値関数で測度 μ に関して a.e. 有限であるとする. F による, $L^2(M,d\mu)$ のかけ算作用素を同じ記号 F で表す. このとき, F は自己共役である[10]. このとき, $\overset{n}{\underset{\rm s}{\otimes}} L^2(M,d\mu)$ と $L^2_{\rm sym}(M^n,d\mu^n)$ との自然な同型対応にいては, 作用素 $F_{\rm b}^{(n)}$ は関数 $\sum_{j=1}^{n} F(m_j)$ によるかけ算作用素になることがわかる (これは, まず, $S_n\left(\hat{\otimes}^n D(F)\right)$ 上で示し, この部分空

9) 「$T \geq 0$ ならば, $T_{\rm b}^{(n)} \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$」を使えばもっと容易.

10) 新井 (1997a) の p.97, 例 2.33.

間が $F_{\mathrm{b}}^{(n)}$ の芯であることを用いればよい)．ゆえに，自然な同一視 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(M,d\mu)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\mathrm{sym}}(M^n, d\mu^n)$ のもとで，

$$(d\Gamma_{\mathrm{b}}(F)\Psi)^{(n)}(m_1,\cdots,m_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} F(m_j)\right)\Psi^{(n)}(m_1,\cdots,m_n)$$

となる $(\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(F)))$.

4-4-3　第 2 種の第 2 量子化作用素

T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．このとき，命題 4-13 (i) と同様にして，各 $n \geq 2$ に対して，$\bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H}$ は $\overset{n}{\otimes} T$ を簡約することが証明される．作用素 $\overset{n}{\otimes} T$ の $\bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H}$ における簡約部分を $(\overset{n}{\otimes} T)_{\mathrm{b}}$ と記す：

$$\left(\overset{n}{\otimes} T\right)_{\mathrm{b}} := \overset{n}{\otimes} T_{\bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H}}. \tag{4.40}$$

定理 4-15　ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ は $\Gamma(T)$ を簡約する．その簡約部分を $\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ とすれば

$$\Gamma_{\mathrm{b}}(T) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\overset{n}{\otimes} T\right)_{\mathrm{b}}. \tag{4.41}$$

証明　命題 4-13 の証明と同様．□

定理 4-16

(i)　T が自己共役ならば，$\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は自己共役である．

(ii)　T がユニタリならば，$\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ はユニタリである．

(iii)　T が縮小作用素ならば，$\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は縮小作用素である．

(iv)　T_n, T $(n \in \mathbb{N})$ が $\mathscr{H}$ 上の縮小作用素で $\text{s-}\lim_{n\to\infty} T_n = T$ ならば，

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \Gamma_{\mathrm{b}}(T_n) = \Gamma_{\mathrm{b}}(T).$$

(v)　$\mathscr{H}$ 上の任意の縮小作用素 S, T に対して，$\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Gamma_{\mathrm{b}}(S) = \Gamma_{\mathrm{b}}(TS)$.

証明　命題 3-12 と命題 4-10 を使えばよい．□

次の定理は，ボソンフォック空間における第 2 量子化作用素と第 2 種の第 2 量子化作用素との関係をあたえる．

定理 4-17 T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする.

(i) すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\Gamma_{\mathrm{b}}(e^{itT}) = e^{itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)}.$$

(ii) $T \geq 0$ ならば, $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \geq 0$ であり, すべての $t \geq 0$ に対して,

$$\Gamma_{\mathrm{b}}(e^{-tT}) = e^{-td\Gamma_{\mathrm{b}}(T)}.$$

証明 定理 3-13 の証明と同様. □

4-4-4 交換特性

命題 4-18 S, T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とし, $D([S,T]) := D(ST) \cap D(TS)$ は稠密であり, $[S,T]$ は可閉であるとする. このとき, $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D([S,T])) \subset D([d\Gamma_{\mathrm{b}}(S), d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)])$ であり, 任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D([S,T]))$ に対して,

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(S), d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)]\Psi = d\Gamma_{\mathrm{b}}([S,T])\Psi$$

が成り立つ.

証明 命題 3-14 の証明と同様. □

全フォック空間上の個数作用素 $\hat{N}$ の $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ における簡約部分を N_{b} と記す :

$$N_{\mathrm{b}} := \hat{N}_{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})} = d\Gamma_{\mathrm{b}}(I). \tag{4.42}$$

これを**ボソン個数作用素**という.

系 4-19 T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とすれば, $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T)) \subset D([N_{\mathrm{b}}, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)])$ であり, 任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ に対して,

$$[N_{\mathrm{b}}, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)]\Psi = 0.$$

証明 系 3-15 の証明と同様. □

命題 4-20 S, T は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする.

(i) $d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)$ と $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ が強可換であるための必要十分条件は, S と T が強可換となることである.

(ii) N_{b} と $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は強可換である.

証明 (i) 命題 3-16 の証明と同様.

(ii) (i) で $S = I$ の場合を考えればよい. □

4-5 節　生成・消滅作用素と第 2 量子化作用素との関係

これまでは，生成・消滅作用素と第 2 量子化作用素を別々に扱ってきた．だが，同一のボソンフォック空間で働くこれらの作用素は当然，何らかの形でたがいに関連しているはずである．次にこの点を考察する．

4-5-1　準備

補題 4-21　$\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，A, B を $\mathscr{K}$ 上の閉作用素とする．$\mathscr{K}$ の部分空間 $\mathscr{D}$ で次の性質をみたすものがあるとする：(i) $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(B)$，(ii) $\mathscr{D}$ は B の芯である，(iii) 定数 $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$ があって，任意の $\psi \in \mathscr{D}$ に対して

$$\|A\psi\| \leq c_1\|B\psi\| + c_2\|\psi\| \tag{4.43}$$

が成り立つ．このとき，$D(B) \subset D(A)$ であり，すべての $\psi \in D(B)$ に対して，(4.43) が成り立つ．

証明　条件 (ii) により，任意の $\psi \in D(B)$ に対して，$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ があって，$\psi_n \longrightarrow \psi$, $B\psi_n \longrightarrow B\psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ が成り立つ．すると，(4.43) により，$\{A\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．したがって，$\phi := \lim_{n\to\infty} A\psi_n$ が存在する．これと A の閉性により，$\psi \in D(A)$ かつ $A\psi = \phi$ が結論される．したがって，$D(B) \subset D(A)$ である．(4.43) で，ψ を ψ_n で置き換えたものについて，$n \longrightarrow \infty$ の極限をとれば，(4.43) がすべての $\psi \in D(B)$ に対して成り立つことが示される．□

補題 4-22　$\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，A を $\mathscr{K}$ 上の非負自己共役作用素，α, β は $0 < \alpha < \beta$ をみたす任意の実数とする．このとき，次の (i), (ii), (iii) が成立する．

(i)　$D(A^\beta) \subset D(A^\alpha)$ かつすべての $\psi \in D(A^\beta)$ に対して，

$$\|A^\alpha\psi\| \leq \|\psi\| + \|A^\beta\psi\|. \tag{4.44}$$

(ii)　$D(A^\beta)$ は A^α の芯である．

(iii)　D を A^β の芯とすれば，D は A^α の芯である．

証明　(i) A のスペクトル測度を E とすれば，$A \geq 0$ より，$\operatorname{supp} E \subset [0, \infty)$．任意の $\psi \in D(A^\beta)$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}} \lambda^{2\alpha}\, d\|E(\lambda)\psi\|^2 = \int_{[0,1]} \lambda^{2\alpha}\, d\|E(\lambda)\psi\|^2 + \int_{(1,\infty)} \lambda^{2\alpha}\, d\|E(\lambda)\psi\|^2$$

$$\le \int_{[0,1]} d\|E(\lambda)\psi\|^2 + \int_{(1,\infty)} \lambda^{2\beta}\, d\|E(\lambda)\psi\|^2$$

$$\le \|\psi\|^2 + \|A^\beta\psi\|^2 < \infty.$$

したがって，$\psi \in D(A^\alpha)$ であり，(4.44) が成立する．

(ii) 任意に $\psi \in D(A^\alpha)$ をとり，$\psi_n = E([0,n))\psi$ とおけば

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2\beta}\, d\|E(\lambda)\psi_n\|^2 = \int_{[0,n)} \lambda^{2\beta}\, d\|E(\lambda)\psi_n\|^2 \le n^{2\beta}\|\psi\|^2 < \infty$$

であるから，$\psi_n \in D(A^\beta)$．さらに，$\psi_n \longrightarrow \psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．また，

$$\|A^\alpha\psi_n - A^\alpha\psi\|^2 = \int_{[n,\infty)} \lambda^{2\alpha}\, d\|E(\lambda)\psi\|^2.$$

いま $\int_{[0,\infty)} \lambda^{2\alpha}\, d\|E(\lambda)\psi\|^2 < \infty$ であるから，上式の右辺は，$n \longrightarrow \infty$ のとき，0 に収束する．したがって，$A^\alpha\psi_n \longrightarrow A^\alpha\psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．ゆえに，$D(A^\beta)$ は A^α の芯である．

(iii) (ii) により，任意の $\psi \in D(A^\alpha)$ に対して，$\psi_n \longrightarrow \psi$, $A^\alpha\psi_n \longrightarrow A^\alpha\psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる $\psi_n \in D(A^\beta)$ がある．つまり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \ge n_0$ ならば，

$$\|\psi_n - \psi\| < \varepsilon, \quad \|A^\alpha\psi_n - A^\alpha\psi\| < \varepsilon$$

が成り立つ．他方，仮定により，各 ψ_n に対して，

$$\|\phi_n - \psi_n\| < \varepsilon, \quad \|A^\beta\phi_n - A^\beta\psi_n\| < \varepsilon,$$

となる $\phi_n \in D$ がある．したがって，(4.44) によって，

$$\|A^\alpha\phi_n - A^\alpha\psi_n\| \le \|\phi_n - \psi_n\| + \|A^\beta\phi_n - A^\beta\psi_n\| \le 2\varepsilon.$$

ゆえに，$n \ge n_0$ ならば，

$$\|\phi_n - \psi\| \le 2\varepsilon, \quad \|A^\alpha\phi_n - A^\alpha\psi\| \le 3\varepsilon.$$

したがって，$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \psi$, $\lim_{n\to\infty} A^\alpha\phi_n = A^\alpha\psi$．ゆえに，$D$ は A^α の芯である． □

4-5-2 第 2 量子化作用素に関する，生成・消滅作用素の相対有界性

さて，本論にもどる．各 $f \in \mathscr{H}$ と $n \ge 0$, $j = 1, \cdots, n+1$ に対して，$\overset{n}{\otimes}\mathscr{H}$ から $\overset{n+1}{\otimes}\mathscr{H}$ への線形作用素 $K_j^{(n)}(f)$ を

$$D(K_j^{(n)}(f)) := \hat{\otimes}^n \mathscr{H}, \tag{4.45a}$$

$$K_j^{(n)}(f)\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n := \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{j-1} \otimes f \otimes \psi_j \otimes \cdots \otimes \psi_n,$$

$$\psi_j \in \mathscr{H},\ j = 1, \cdots, n+1, \tag{4.45b}$$

によって定義する ($\hat{\otimes}^n \mathscr{H}$ の任意の元に対しては，線形性によって拡張する)．なお，$n = 0$ の場合は，$K_1^{(0)}(f)z := zf$ ($z \in \otimes^0 \mathscr{H} := \mathbb{C}$) とする．この定義が実際に意味をもつことは容易に確かめられる．

補題 4-23　各 $f \in \mathscr{H}$ と $n \geq 0, j = 1, \cdots, n+1$ に対して，$K_j^{(n)}(f)$ は，$\otimes^n \mathscr{H}$ 全体を定義域とする有界線形作用素に一意的に拡大される．この拡大を $\tilde{K}_j^{(n)}(f)$ とすれば，すべての $\Psi \in \otimes^n \mathscr{H}$ に対して，

$$\|\tilde{K}_j^{(n)}(f)\Psi\| = \|f\|\,\|\Psi\| \tag{4.46}$$

が成り立つ．

証明　$\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ の CONS とすれば，$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \mid i_k \geq 1, k = 1, \cdots, n\}$ は $\otimes^n \mathscr{H}$ の CONS である (命題 1-4 (ii))．$D := \mathscr{L}\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \mid i_k \geq 1, k = 1, \cdots, n\}$ とおく．このとき，任意の $\Psi \in D$ に対して，$\|K_j^{(n)}(f)\Psi\| = \|f\|\,\|\Psi\|$ であることが直接計算によりわかる．したがって，$K_j^{(n)}(f) \restriction D$ は有界な線形作用素であり，$\|K_j^{(n)}(f)\| = \|f\|$．D は稠密であるから，有界作用素の拡大定理により，$K_j^{(n)}(f)$ は $\otimes^n \mathscr{H}$ 上の有界線形作用素に一意的に拡大され，すべての $\Psi \in \otimes^n \mathscr{H}$ に対して，(4.46) が成り立つことになる．□

次の命題は生成・消滅作用素の，第 2 量子化作用素に関する相対限界をあたえる重要な事実である．

命題 4-24　T は $\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素で単射であるとする．このとき，任意の $f \in D(T^{-1/2})$ に対して，$D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}) \subset D(A(f)) \cap D(A(f)^*)$ であり，すべての $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対して，

$$\|A(f)\Psi\| \leq \|T^{-1/2}f\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|, \tag{4.47a}$$

$$\|A(f)^*\Psi\|^2 \leq \|T^{-1/2}f\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|^2 + \|f\|^2\|\Psi\|^2. \tag{4.47b}$$

注意 4-3 $T \geq 0$ ならば，定理 4-17 (ii) によって，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \geq 0$ である．したがって，平方根 $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}$ が (作用素解析を経由して) 定義される．

証明 ベクトル $\eta = S_n(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n)$ ($\psi_j \in \mathscr{H}$, $j = 1, \cdots, n$) に対して，

$$S_{n+1}(f \otimes \eta) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} S_{n+1}(f \otimes \psi_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\tau(n)})$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (f \otimes \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)}$$

$$+ \psi_{\sigma(1)} \otimes f \otimes \psi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)}$$

$$\cdots + \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)} \otimes f)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} K_j^{(n)}(f)\eta.$$

したがって，すべての $\Psi^{(n)} \in S_n\left(\hat{\otimes}^n \mathscr{H}\right)$ に対して，

$$S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)}) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} K_j^{(n)}(f)\Psi^{(n)}.$$

各 $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \cdots, n$ に対して，$\hat{\otimes}^n \mathscr{H}$ 上の作用素 $T_{n,j}^{(1/2)}$ を

$$T_{n,j}^{(1/2)} := I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overbrace{T^{1/2}}^{j\ \text{番目}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

によって定義する．このとき，

$$K_j^{(n)}(f)\Psi^{(n)} = T_{n+1,j}^{(1/2)} K_j^{(n)}(T^{-1/2} f)\Psi^{(n)}$$

と書ける．したがって，任意の $\Phi^{(n+1)} \in S_{n+1}\left(\hat{\otimes}^{n+1} D(T)\right)$ に対して，(4.6) から，

$$\langle A_n(f)\Phi^{(n+1)}, \Psi^{(n)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \langle T_{n+1,j}^{(1/2)} \Phi^{(n+1)}, K_j^{(n)}(T^{-1/2} f)\Psi^{(n)} \rangle.$$

ゆえに，シュヴァルツの不等式と (4.46) により，

$$|\langle A_n(f)\Phi^{(n+1)}, \Psi^{(n)} \rangle|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \|T_{n+1,j}^{(1/2)} \Phi^{(n+1)}\| \, \|K_j^{(n)}(T^{-1/2} f)\Psi^{(n)}\|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\|T_{n+1,j}^{(1/2)}\Phi^{(n+1)}\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\|K_j^{(n)}(T^{-1/2}f)\Psi^{(n)}\|^2\right)^{1/2}$$

$$= \|T^{-1/2}f\|\left(\sum_{j=1}^{n+1}\|T_{n+1,j}^{(1/2)}\Phi^{(n+1)}\|^2\right)^{1/2}\|\Psi^{(n)}\|.$$

一方，

$$\sum_{j=1}^{n+1}\| T_{n+1,j}^{(1/2)}\Phi^{(n+1)} \|^2 = \langle \Phi^{(n+1)}, T_{\mathrm{b}}^{(n+1)}\Phi^{(n+1)}\rangle$$

である．したがって，

$$|\langle A_n(f)\Phi^{(n+1)}, \Psi^{(n)}\rangle| \leq \|T^{-1/2}f\|\langle \Phi^{(n+1)}, T_{\mathrm{b}}^{(n+1)}\Phi^{(n+1)}\rangle^{1/2}\|\Psi^{(n)}\|.$$

$S_n\left(\hat{\otimes}^n \mathscr{H}\right)$ は $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathscr{H}$ で稠密であるから，いま得た不等式はすべての $\Psi^{(n)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathscr{H}$ に対して成り立つことになる．したがって，

$$\| A_n(f)\Phi^{(n+1)} \| \leq \| T^{-1/2}f \|\langle \Phi^{(n+1)}, T_{\mathrm{b}}^{(n+1)}\Phi^{(n+1)}\rangle^{1/2} \tag{4.48}$$

を得る[11]．命題 4-10 (iv) の応用により，部分空間 $S_{n+1}\left(\hat{\otimes}^{n+1} D(T)\right)$ は $T_{\mathrm{b}}^{(n+1)}$ の芯であるから，(4.48) はすべての $\Phi^{(n+1)} \in D(T_{\mathrm{b}}^{(n+1)})$ に対して成り立つことになる．任意の $\Phi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) \cap \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，$\Phi \in D(A(f))$ であり，$(A(f)\Phi)^{(n)} = A_n(f)\Phi^{(n+1)}$ であるから，拡大された (4.48) は

$$\|(A(f)\Phi)^{(n)}\|^2 \leq \|T^{-1/2}f\|^2\langle \Phi^{(n+1)}, (d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi)^{(n+1)}\rangle$$

を意味する．そこで，n について和をとれば，

$$\|A(f)\Phi\|^2 \leq \|T^{-1/2}f\|^2\langle \Phi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi\rangle.$$

ここで，$\langle \Phi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi\rangle = \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Phi\|^2$ に注意すれば，

$$\|A(f)\Phi\| \leq \|T^{-1/2}f\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Phi\|$$

を得る．命題 3-5 (iii) と命題 4-10 (iv) によって，$D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) \cap \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の芯であるから，補題 4-22 により，それは $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}$ の芯でもある．この事実と補題 4-21 によって，$D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}) \subset D(A(f))$ かつ (4.47a) を得る．

(4.21a) より，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，

---

[11] ヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ において，任意の $\psi \in \mathscr{X}$ に対して，$\|\psi\| = \sup_{\phi\in\mathscr{X}, \phi\neq 0}|\langle \psi, \phi\rangle_{\mathscr{X}}|/\|\phi\|$ が成り立つことに注意．

$$\|A(f)^*\Psi\|^2 = \|f\|^2\|\Psi\|^2 + \|A(f)\Psi\|^2. \tag{4.49}$$

これと (4.47a) により，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}) \cap D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対して，(4.47b) が成り立つ．再び，補題 4-21 を応用することにより，$A(f)^*$ に関する主張が証明される．□

注意 4-4 T に対して，スペクトル定理のかけ算作用素形式を応用することにより，命題 4-24 は別の方法でも証明できる (新井 (1997b) の命題 3.14 を参照).

命題 4-24 において，特に，$T = I$ の場合を考えると，ボソン個数作用素 $N_{\mathrm{b}} = d\Gamma_{\mathrm{b}}(I)$ に関する，生成・消滅作用素の相対限界に対する評価が得られる．

命題 4-25 任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して，$D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}) \subset D(A(f)) \cap D(A(f)^*)$ であり，すべての $\Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して，

$$\|A(f)\Psi\| \le \|f\|\|N_{\mathrm{b}}^{1/2}\Psi\|, \tag{4.50a}$$

$$\|A(f)^*\Psi\| \le \|f\|\|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\Psi\| \tag{4.50b}$$

が成り立つ．

4-5-3 第 2 量子化作用素と生成・消滅作用素の交換関係

命題 4-26 T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．

(i) 任意の $f \in D(T)$ と $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ に対して，$\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)A(f)^*) \cap D(A(f)^* d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ であり，

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A(f)^*]\Psi = A(Tf)^*\Psi. \tag{4.51}$$

(ii) 任意の $f \in D(T) \cap D(T^*)$ と $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ に対して，$\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) A(f)) \cap D(A(f) d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ であり，

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A(f)]\Psi = -A(T^*f)\Psi. \tag{4.52}$$

証明 (i) $\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ とすれば，(4.18) によって，$\Psi^{(n)}$ は

$$\eta = A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}} = \sqrt{n!} f_1 \cdots f_n$$

($f_j \in D(T)$ $(j = 1, \cdots, n)$) という形のベクトルの有限 1 次結合である．明らかに，

$\eta \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ であり，

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\eta = \sum_{j=1}^{n} A(f_1)^* \cdots A(Tf_j)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}. \tag{4.53}$$

これは $D(A(f)^*)$ の元であり，

$$A(f)^* d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\eta = \sum_{j=1}^{n} A(f)^* A(f_1)^* \cdots A(Tf_j)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}.$$

一方，$A(f)^*\eta \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ であり，

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)A(f)^*\eta = A(Tf)^*\eta + \sum_{j=1}^{n} A(f)^* A(f_1)^* \cdots A(Tf_j)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}.$$

したがって，

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A(f)^*]\eta = A(Tf)^*\eta.$$

ゆえに，(4.51) が得られる．

(ii) (4.53) によって，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\eta \in D(A(f))$ であり，CCR と (4.17) により，

$$A(f)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\eta = \sum_{j,k;k\neq j}^{n} \langle f, f_k\rangle A(f_1)^* \cdots \widehat{A(f_k)^*} \cdots A(Tf_j)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \langle f, Tf_j\rangle A(f_1)^* \cdots \widehat{A(f_j)^*} \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}.$$

右辺の第 2 項は，$\langle f, Tf_j\rangle = \langle T^*f, f_j\rangle$ に注意すれば，$A(T^*f)\eta$ に等しいことがわかる．したがって，

$$A(f)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\eta = \sum_{j,k;k\neq j}^{n} \langle f, f_k\rangle A(f_1)^* \cdots \widehat{A(f_k)^*} \cdots A(Tf_j)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}$$
$$+ A(T^*f)\eta. \tag{4.54}$$

同様に，

$$A(f)\eta = \sum_{k=1}^{n} \langle f, f_k\rangle A(f_1)^* \cdots \widehat{A(f_k)^*} \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}.$$

したがって，$A(f)\eta \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ であり，

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)A(f)\eta = \sum_{j,k:j\neq k}^{n} \langle f, f_k\rangle A(f_1)^* \cdots \widehat{A(f_k)^*} \cdots A(Tf_j)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}.$$

この式から (4.54) を引けば，

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A(f)]\eta = -A(T^*f)\eta$$

を得る．したがって，(4.52) が成立する．　□

作用素 T が $\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素で単射である場合には，命題 4-26 はもっと精密化される：

定理 4-27 T は $\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素で単射であるとする．このとき，

(i) 任意の $\Psi, \Phi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ と $f \in D(T) \cap D(T^{-1/2})$ に対して，

$$\langle d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi, A(f)\Phi\rangle - \langle A(f)^*\Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi\rangle = -\langle \Psi, A(Tf)\Phi\rangle. \tag{4.55}$$

(ii) 任意の $f \in D(T) \cap D(T^{-1/2})$ に対して $A(f)^\sharp$ は $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{3/2})$ を $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ の中へうつし，$D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{3/2})$ 上で交換関係

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A(f)^*] = A(Tf)^*, \tag{4.56}$$

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A(f)] = -A(Tf), \tag{4.57}$$

が成立する．

証明 (i) 命題 4-26 によって，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T)), \Phi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ に対して，(4.55) が成立する．$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の芯であるから，任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ に対して，$\Psi_n \longrightarrow \Psi$, $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi_n \longrightarrow d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる $\Psi_n \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ が存在する．したがって，

$$\langle d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi_n, A(f)\Phi\rangle - \langle A(f)^*\Psi_n, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi\rangle = -\langle \Psi_n, A(Tf)\Phi\rangle.$$

(4.47b) によって，$A(f)^*\Psi_n \longrightarrow A(f)^*\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ がわかる．ゆえに，上式で，$n \longrightarrow \infty$ とすることにより，(4.55) が得られる．

(ii) $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{3/2}), \Phi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ とする．このとき，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ である．したがって，命題 4-24 と (4.55) により，

$$\langle [A(f)^* d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + A(Tf)^*]\Psi, \Phi\rangle = \langle A(f)^*\Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi\rangle.$$

これは，$A(f)^*\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ かつ

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)A(f)^*\Psi = [A(f)^* d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + A(Tf)^*]\Psi$$

を意味する．ゆえに $A(f)^*$ に関する主張がしたがう．$A(f)$ についても同様． □

注意 4-5 もっと一般の定義域 $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^n)$ に対する $A(f)^\sharp$ の写像特性については Cannon (1971), Arai (1990a) を参照．

4-5-4　生成・消滅作用素を用いての第 2 量子化作用素の表示

次の補題は，対応：$f \longrightarrow A(f)^\sharp$ $(f \in \mathscr{H})$ のある種の連続性を示すものである．

補題 4-28　(i) T は $\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素で単射であるとする．$f_n, f \in D(T^{-1/2})$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim_{n\to\infty} T^{-1/2} f_n = T^{-1/2} f$ とする．このとき，すべての $\Psi \in D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2})$ に対して，$\lim_{n\to\infty} A(f_n)^\sharp \Psi = A(f)^\sharp \Psi$.

(ii) $f_n, f \in \mathscr{H}$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ とする．このとき，すべての $\Psi \in D(N_{\rm b}^{1/2})$ に対して，$\lim_{n\to\infty} A(f_n)^\sharp \Psi = A(f)^\sharp \Psi$.

証明　(i) 命題 4-24 により，

$$\|A(f_n)\Psi - A(f)\Psi\| \le \|T^{-1/2}(f_n - f)\| \, \|d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}\Psi\| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

$A(f_n)^*\Psi$ についても同様.

(ii) (i) において $T = I$ の場合を考えればよい．　□

次の命題は，生成・消滅作用素を用いて第 2 量子化作用素を表示する公式をあたえる．

命題 4-29　T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とし，$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathscr{H}$ の CONS とする．

(i)　$S \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ とし，ST は可閉であるとする．$e_n \in D(T^*)$ $(n \ge 1)$ としよう．このとき，すべての $\Psi \in \mathscr{F}_{\rm b,fin}(D(T))$ に対して，

$$d\Gamma_{\rm b}(ST)\Psi = \sum_{n=1}^\infty A(Se_n)^* A(T^*e_n)\Psi \tag{4.58}$$

が成立する．特に，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\rm b,fin}(\mathscr{H})$ に対して，

$$N_{\rm b}\Psi = \sum_{n=1}^\infty A(e_n)^* A(e_n)\Psi. \tag{4.59}$$

(ii)　S を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された線形作用素で ST が稠密に定義された可閉作用素となるようなものとする．さらに，$\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset D(S) \cap D(T^*)$ としよう．このとき，すべての $\Phi \in \mathscr{F}_{\rm b,fin}(D(S^*))$, $\Psi \in \mathscr{F}_{\rm b,fin}(D(ST))$ に対して，

$$\langle \Phi, d\Gamma_{\rm b}(ST)\Psi\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^N A(Se_n)^* A(T^*e_n)\Psi \right\rangle. \tag{4.60}$$

証明　(i) $\Psi = A(g_1)^* \cdots A(g_m)^* \Omega_{\mathscr{H}}$ $(g_j \in D(T), m \ge 1)$ という形のベクトル Ψ に対して，(4.58) を示せば十分である．$L_N := \sum_{n=1}^N A(Se_n)^* A(T^*e_n)$ とおくと，CCR

と (4.17) を用いる直接計算により，

$$L_N\Psi = \sum_{j=1}^{m} A(g_1)^* \cdots A(SP_N g_j)^* \cdots A(g_m)^* \Omega_{\mathscr{H}}. \tag{4.61}$$

ただし，P_N は，$P_N f := \sum_{n=1}^{N} \langle T^* e_n, f\rangle e_n$ $(f \in \mathscr{H})$ によって定義される，$\mathscr{H}$ 上の作用素である $(D(P_N) := \mathscr{H})$．$f \in D(T)$ ならば，$P_N f \longrightarrow Tf$ $(N \longrightarrow \infty)$ である．S は有界であるから，$SP_N f \longrightarrow STf$ $(N \longrightarrow \infty)$．したがって，補題 4-28 (ii) により，

$$L_N\Psi \longrightarrow \sum_{j=1}^{m} A(g_1)^* \cdots A(STg_j)^* \cdots A(g_m)^* \Omega_{\mathscr{H}}$$

$$= d\Gamma_{\mathrm{b}}(ST)\Psi, \quad N \longrightarrow \infty.$$

ゆえに，(4.58) を得る．

(ii) 任意の $\Phi := A(h_1)^* \cdots A(h_m)^* \Omega_{\mathscr{H}}$ $(h_j \in D(S^*),\ j = 1, \cdots, m)$ と (i) のベクトル Ψ (ただし，$g_j \in D(ST)$ $(j = 1, \cdots, m)$ とする) に対して，(4.20) と (4.61) によって，

$$\langle \Phi, L_N\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \langle h_1, g_{\sigma(1)}\rangle \cdots \langle h_j, SP_N g_{\sigma(j)}\rangle \cdots \langle h_m, g_{\sigma(m)}\rangle.$$

一方，$\langle h_j, SP_N g_{\sigma(j)}\rangle = \langle S^* h_j, P_N g_{\sigma(j)}\rangle$ により，$\lim_{N\to\infty} \langle h_j, SP_N g_{\sigma(j)}\rangle = \langle S^* h_j, Tg_{\sigma(j)}\rangle = \langle h_j, STg_{\sigma(j)}\rangle$．したがって，$\langle \Phi, L_N\Psi\rangle \longrightarrow \langle \Phi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(ST)\Psi\rangle$ $(N \longrightarrow \infty)$，すなわち，(4.60) が得られる． □

4-6 節　Segal の場の作用素

生成・消滅作用素を素材としてつくられる作用素たちは，ボソンフォック空間の解析における主要な対象である．このような作用素のうちで基本的なものの 1 つは，

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(A(f) + A(f)^*), \quad f \in \mathscr{H}, \tag{4.62}$$

によって定義される作用素である．この作用素は **Segal (シーガル) の場の作用素** (Segal's field operator) とよばれる．その名称が暗示するように，作用素 $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は，場の量子論への応用において基本的な役割を担うことになる．Segal の場の作用素の有する性質を明らかにすることがこの節の目的である．

4-6-1　基本的性質

命題 4-25 によって，

$$D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}) \subset D(\Phi_{\mathrm{S}}(f)), \quad f \in \mathscr{H}, \tag{4.63}$$

であり，

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi\| \le \sqrt{2}\|f\|\|N_{\mathrm{b}}^{1/2}\Psi\| + \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|\|\Psi\|, \quad \Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}),\ f \in \mathscr{H}, \tag{4.64}$$

が成り立つ．したがって，特に，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は稠密に定義された作用素である．作用素 $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ のエルミート性は (4.62) から明らか．したがって，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は対称作用素である．

生成･消滅作用素 $A(f)^{\sharp}$ の f に関する加法性は，対応 $f \longrightarrow \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi$ ($\Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$) の実線形性を導く：

$$\Phi_{\mathrm{S}}(af+bg)\Psi = \{a\Phi_{\mathrm{S}}(f) + b\Phi_{\mathrm{S}}(g)\}\Psi,$$
$$a, b \in \mathbb{R}, \quad f, g \in \mathscr{H}, \quad \Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}), \tag{4.65}$$

が成り立つ．

注意 4-6　実数でない複素数 α に対しては，$f \ne 0$ ならば，$\Phi_{\mathrm{S}}(\alpha f) \ne \alpha\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ である．つまり，対応 $f \longrightarrow \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi$ ($\Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$) は**複素線形ではない**！　これは，対応 $f \longrightarrow A(f)\Psi$ ($\Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$) が反線形であることによる．

$f \ne 0$ ならば，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は非有界である (問題 7, 問題 8)．

定理 4-30

(i)　各 $f \in \mathscr{H}$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{H})$ と $\mathscr{F}_{\mathrm{b,0}}(\mathscr{H})$ を不変にし，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,0}}(\mathscr{H})$ 上で交換関係

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)] = i\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle, \quad f, g \in \mathscr{H}, \tag{4.66}$$

をみたす．

(ii)　$\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の任意の稠密な部分空間とする．このとき，各 $f \in \mathscr{H}$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ 上で本質的に自己共役である．

(iii)(連続性)　T を $\mathscr{H}$ 上の単射な非負自己共役作用素とし，$f_n,\ f \in D(T^{-1/2})$, $f_n \longrightarrow f$, $T^{-1/2}f_n \longrightarrow T^{-1/2}f$ $(n \longrightarrow \infty)$ とする．このとき，任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)\Psi \longrightarrow \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．

(iv)　$\mathscr{H}$ の任意の部分空間 $\mathscr{D}$ に対して，集合の等式

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D}) = \mathscr{L}\{\Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)\Omega_{\mathscr{H}},\ \Omega_{\mathscr{H}}\,|\,n\ge 1,\ f_j\in\mathscr{D}\}. \qquad (4.67)$$

が成立する．

(v) $\mathscr{H}$ の任意の稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ に対して，ユニタリ作用素の集合 $\{e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\,|\,f\in\mathscr{D}\}$ は既約である[12]．

証明 (i) $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{H})$ と，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,0}}(\mathscr{H})$ の $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ 不変性は，それらが，$A(f)^\sharp$ 不変であることによる．交換関係 (4.66) は $A(f)^\sharp$, $A(g)^\sharp$ がみたす CCR からしたがう．

(ii) $B_\pm := (\Phi_{\mathrm{S}}(f)\pm i)\restriction\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ が稠密であることを示せばよい (定理 2-11 の応用)．$\Psi\in\mathrm{Ran}\,(B_+)^\perp$ としよう．したがって，任意の $\Phi\in\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ に対して，$\langle\Psi, B_+\Phi\rangle = 0$．$n\ge 0$ を任意に固定し，ベクトル Φ として，特に，$m\ne n$ ならば $\Phi^{(m)}=0$ をみたすものをとれば，

$$\sqrt{2}i\langle\Psi^{(n)},\Phi^{(n)}\rangle + \langle\Psi^{(n+1)}, A_n(f)^*\Phi^{(n)}\rangle + \langle\Psi^{(n-1)}, A_{n-1}(f)\Phi^{(n)}\rangle = 0.$$

したがって，

$$\sqrt{2}i\langle\Psi^{(n)},\Phi^{(n)}\rangle + \langle A_n(f)\Psi^{(n+1)},\Phi^{(n)}\rangle + \langle A_{n-1}(f)^*\Psi^{(n-1)},\Phi^{(n)}\rangle = 0.$$

そこで，$A_{n-1}(f)^*\Psi^{(n-1)} = \sqrt{n}S_n(f\otimes\Psi^{(n-1)})$ に注意すれば，

$$\langle A_n(f)\Psi^{(n+1)},\Phi^{(n)}\rangle + \sqrt{n}\langle S_n(f\otimes\Psi^{(n-1)}),\Phi^{(n)}\rangle = -\sqrt{2}i\langle\Psi^{(n)},\Phi^{(n)}\rangle$$

を得る．これと $S_n\left(\hat{\otimes}^n\mathscr{D}\right)$ の $\otimes_{\mathrm{s}}^n\mathscr{H}$ での稠密性により，

$$A_n(f)\Psi^{(n+1)} + \sqrt{n}S_n(f\otimes\Psi^{(n-1)}) = \sqrt{2}i\Psi^{(n)}$$

がすべての $n\ge 0$ に対してして成り立つ ($\Psi^{(-1)} := 0$)．この式と $\Psi^{(n)}$ の内積をとると，

$$\langle\Psi^{(n)}, A_n(f)\Psi^{(n+1)}\rangle + \sqrt{n}\langle\Psi^{(n)}, f\otimes\Psi^{(n-1)}\rangle = \sqrt{2}i\|\Psi^{(n)}\|^2.$$

ここで，(4.8) を使えば，

$$\sqrt{n+1}\langle f\otimes\Psi^{(n)},\Psi^{(n+1)}\rangle + \sqrt{n}\langle\Psi^{(n)}, f\otimes\Psi^{(n-1)}\rangle = \sqrt{2}i\|\Psi^{(n)}\|^2$$

を得る．両辺を n について加えれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}\langle f\otimes\Psi^{(n)},\Psi^{(n+1)}\rangle + \sqrt{n}\langle\Psi^{(n)}, f\otimes\Psi^{(n-1)}\rangle\right) = \sqrt{2}i\|\Psi\|^2.$$

---

[12] $\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ は $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の閉包であり，(ii) によって自己共役である．既約性の概念については，4-3-3 項を参照．

ここで，$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\langle f\otimes\Psi^{(n)},\Psi^{(n+1)}\rangle$, $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\langle\Psi^{(n)},f\otimes\Psi^{(n-1)}\rangle$ は個々に収束するとは限らないことに注意．だが，すぐ上の式の左辺は実数であることはわかる．しかし，右辺は純虚数であるから，両辺とも 0 でなければならない．したがって，$\|\Psi\|=0$，すなわち，$\Psi=0$ が導かれる．ゆえに，$\mathrm{Ran}\,(B_+)$ は稠密である．同様にして，$\mathrm{Ran}\,(B_-)$ も稠密であることが示される．

(iii) 命題 4-24 によって，

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi\|\le\sqrt{2}\|T^{-1/2}f\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|+\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|\|\Psi\|,$$
$$f\in D(T^{-1/2}),\quad \Psi\in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}). \tag{4.68}$$

そこで，f を $f-f_n$ で置き換えれば，求める結果を得る．

(iv) (4.67) の右辺の集合を D としよう．CCR と (4.17) を使えば，$D\subset\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ であることがわかる．一方，

$$\Pi_{\mathrm{S}}(f):=\Phi_{\mathrm{S}}(if),\quad f\in\mathscr{H}, \tag{4.69a}$$

とおけば，(4.62) と対応 $f\longrightarrow A(f)$ の反線形性により，

$$\Pi_{\mathrm{S}}(f)=\frac{i}{\sqrt{2}}(A(f)^*-A(f)),\quad f\in\mathscr{H}. \tag{4.69b}$$

これから，すべての $f\in\mathscr{H}$ に対して，$D(A(f))\cap D(A(f)^*)$ 上で，

$$A(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi_{\mathrm{S}}(f)+i\Pi_{\mathrm{S}}(f)\right), \tag{4.70a}$$

$$A(f)^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi_{\mathrm{S}}(f)-i\Pi_{\mathrm{S}}(f)\right) \tag{4.70b}$$

が成り立つ．これは $D\supset\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ を導く．

(v) T を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の有界線形作用素で，すべての $f\in\mathscr{D}$ に対して，$e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}$ と可換であるとする．したがって，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，$Te^{it\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}=e^{it\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}T$．$\Psi\in D(\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)})$ とすれば，$e^{it\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi$ は t について強微分可能であるから，すぐ上の交換関係を Ψ に作用させた式について，$t=0$ での強微分を考えると，$T\Psi\in D(\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)})$ かつ $\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}T\Psi=T\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Psi$ が得られる．すなわち，$T\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\subset\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}T$．特に，任意の $\Psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{D})$ に対して，$T\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi=\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}T\Psi$．したがって，任意の $\Xi\in D(A(f))\cap D(A(f)^*)$ に対して，(4.70a), (4.70b) を用いて，

$$\langle T\Psi,A(f)\Xi\rangle=\left\langle T\Psi,\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\mathrm{S}}(f)+i\Phi_{\mathrm{S}}(if))\Xi\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)} - i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(if)})T\Psi, \Xi \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(T\Phi_{\mathrm{S}}(f) - iT\Phi_{\mathrm{S}}(if))\Psi, \Xi \right\rangle$$

$$= \langle TA(f)^*\Psi, \Xi \rangle$$

と変形できる．$D(A(f)) \cap D(A(f)^*) \supset \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ は $A(f)$ の芯であるから，$T\Psi \in D(A(f)^*)$ かつ $A(f)^*T\Psi = TA(f)^*\Psi$ が結論される．同様に，$T\Psi \in D(A(f))$ かつ $A(f)T\psi = TA(f)\Psi$ が得られる．したがって，命題 4-6 により，T は恒等作用素のスカラー倍でなければならない． □

定理 4-30 (ii) によって，$\Phi_S(f)$ の閉包 $\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ は自己共役である．

定理 4-30 (iv) は，あらゆる Segal の場の作用素を真空 $\Omega_{\mathscr{H}}$ に次々に作用してできるベクトルの集合が $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ で稠密な部分空間を張ることを示している．

4-6-2 指数作用素の性質

次に Segal の場の作用素の指数作用素 $e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}$ $(z \in \mathbb{C},\ f \in \mathscr{H})$ の性質を考察する．まず，準備として，CCR をみたす作用素に関わる計算をする上で重要な関係式を証明する．

補題 4-31 X, Y は単位元 I をもつ代数の元であって，交換関係

$$XY - YX = \alpha I \tag{4.71}$$

をみたすとする．ただし，α は複素定数である[13]．このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k X^{n-k}Y^k = \sum_{k,r\geq 0;2r+k=n} \frac{n!}{k!r!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^r (X+Y)^k \tag{4.72}$$

が成立する．ここで，${}_nC_k$ は 2 項係数である ((1.44))．

証明 数学帰納法による．$n=1$ のときは，(4.72) の両辺とも $X+Y$ である．次に任意に固定された n で (4.72) が成立したとする．(4.72) の左辺を Z_n としよう．2 項係数のみたす漸化式

$${}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1}, \quad k = 1, \cdots, n \tag{4.73}$$

---

[13] 本書で代数というときは，複素数体上の代数をさす．

と帰納法の仮定を使うと，

$$Z_{n+1} = \sum_{2r+k=n} \frac{n!}{k!r!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^r \{X(X+Y)^k + (X+Y)^k Y\}$$

と変形できる．一方，(4.71) を繰り返し用いると，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$X(zX+Y)^k = k\alpha(zX+Y)^{k-1} + (zX+Y)^k X, \quad k \geq 1 \tag{4.74}$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= 2 \sum_{2r+k=n; k\geq 1} \frac{n!}{(k-1)!r!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{r+1} (X+Y)^{k-1} \\ &\quad + \sum_{2r+k=n} \frac{n!}{k!r!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^r (X+Y)^{k+1} \\ &= 2 \sum_{2r+k=n+1} \frac{n!}{k!(r-1)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^r (X+Y)^k \\ &\quad + \sum_{2r+k=n+1} \frac{n!}{(k-1)!r!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^r (X+Y)^k. \end{aligned}$$

一方，$2r+k=n+1$ ならば，

$$\frac{(n+1)!}{k!r!} = \frac{n!}{(k-1)!r!} + 2\frac{n!}{k!(r-1)!}, \quad r, k \geq 1. \tag{4.75}$$

これを上式に代入すれば，Z_{n+1} は (4.72) の右辺で，n が $n+1$ の場合の式に等しいことがわかる．よって，(4.72) で n が $n+1$ のときも成立する．□

注意 4-7　(4.72) は，通常の複素数に関する 2 項展開をある種の非可換な変数へと拡張したものと見ることができる．実際，X, Y が可換，すなわち，$\alpha = 0$ ならば，(4.72) は 2 項展開の公式に他ならない．

A をヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ 上の線形作用素とする．集合

$$C^\infty(A) := \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n) \tag{4.76}$$

の元を A **に対する** C^∞ **ベクトル**という．ベクトル $\psi \in C^\infty(A)$ について，ある $t > 0$ があって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\psi\|}{n!} t^n < \infty \tag{4.77}$$

であるとき，ψ を A の**解析ベクトル** (analytic vector) という．もし，すべての $t > 0$ に対して，(4.77) が成り立つならば，ψ は A の**全解析ベクトル** (entire analytic vector) とよばれる．A の全解析ベクトルの全体を $\mathfrak{E}(A)$ で表す．

補題 4-32 A をヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素とする．

(i) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathfrak{E}(A) \subset D(e^{zA})$ であり，

$$e^{zA}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n \psi}{n!} z^n, \quad \psi \in \mathfrak{E}(A), \tag{4.78}$$

が成り立つ．

(ii) A のスペクトル測度を E_A として，

$$D_0(A) := \mathscr{L}\{E_A([-n,n])\psi \,|\, n \in \mathbb{N},\, \psi \in \mathscr{K}\}$$

とおけば，$D_0(A)$ は稠密であり，$D_0(A) \subset \mathfrak{E}(A)$ である．

(iii) 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して，$C^\infty(A)$ は A^p の芯である．

注意 4-8 $\mathbb{R}$ 上の関数：$\lambda \longrightarrow e^{z\lambda}$ は連続であるから，$e^{zA} := \int_{\mathbb{R}} e^{z\lambda} dE_A(\lambda)$ (E_A は A のスペクトル測度) は稠密に定義された閉作用素であり，

$$(e^{zA})^* = e^{z^* A}$$

が成り立つ[14)]．特に，$t \in \mathbb{R}$ ならば，e^{tA} は自己共役作用素である．

証明 (i) $\psi \in \mathfrak{E}(A)$ とし，まず，$\psi \in D(e^{zA})$ を示す．E_A を A のスペクトル測度とする．$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と書くと，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |e^{z\lambda}|^2 \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{2x\lambda} \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \le \int_{\mathbb{R}} e^{2|x||\lambda|} \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2|x|)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^n \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2|x|)^n}{n!} \langle \psi, |A|^n \psi \rangle \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2|x|)^n}{n!} \| \, |A|^n \psi \| \|\psi\|.
\end{aligned}$$

ここで，任意の $\phi \in D(A^n)$ に対して，$\| \, |A|^n \phi \, \| = \| \, A^n \phi \, \|$ が成り立つことに注意すれば，

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{z\lambda}|^2 \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2|x|)^n}{n!} \|A^n \psi\| \|\psi\| < \infty.$$

したがって，$\psi \in D(e^{zA})$．

[14)] 定理 2-14 (ii).

次に，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$f_N(\lambda) = \left| e^{z\lambda} - \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} z^n \right|^2$$

とおけば，

$$\left\| e^{zA}\psi - \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n\psi}{n!} z^n \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} f_N(\lambda)\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2.$$

一方，$\lim_{N\to\infty} f_N(\lambda) = 0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$，$f_N(\lambda) \le e^{2|z||\lambda|}$．上の議論において x は任意であったから，$\int_{\mathbb{R}} e^{2|z||\lambda|}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 < \infty$．したがって，ルベーグの優収束定理により，$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_N(\lambda)\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 = 0$．ゆえに (4.78) が得られる．

(ii) 任意の $\psi \in \mathscr{K}$ に対して，$\psi_n = E_A([-n,n])\psi$ とおけば，$\psi_n \in D_0(A)$ であり，$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$．したがって，$D_0(A)$ は稠密．さらに，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2m}\, d\|E_A(\lambda)\psi_n\|^2 \le |n|^{2m}\|\psi\|^2$$

であるから，$\psi_n \in C^\infty(A)$．この不等式は，任意の $t > 0$ に対して，

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|A^m\psi_n\|}{m!} t^n \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|n|^m\|\psi\|}{m!} t^n = e^{t|n|}\|\psi\| < \infty$$

を導くので，$\psi_n \in \mathfrak{E}(A)$ である．

(iii) 任意の $\psi \in D(A^p)$ に対して，ψ_n を (ii) の証明のように定義する．このとき，(ii) の証明から，$\psi_n \in C^\infty(A)$, $\psi_n \longrightarrow \psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．さらに，

$$\|A^p\psi_n - A^p\psi\|^2 = \int_{|\lambda|>n} |\lambda|^{2p}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2.$$

右辺の積分は，ルベーグの優収束定理を応用することにより，$n \longrightarrow \infty$ のとき，0 に収束することがわかる．したがって，$A^p\psi_n \longrightarrow A^p\psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．ゆえに題意がしたがう．　□

任意の $n \in \mathbb{N}$ と $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{H}$ に対して，$A_1(f_1)^\sharp \cdots A(f_n)^\sharp$ の定義域に属する，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ のベクトルの全体を $\mathscr{F}^\infty$ とする：

$$\mathscr{F}^\infty(\mathscr{H}) := \bigcap_{n\in\mathbb{N},\, f_j\in\mathscr{H},\, j=1,\cdots,n,\sharp} D(A(f_1)^\sharp \cdots A(f_n)^\sharp). \tag{4.79}$$

明らかに

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{F}^\infty(\mathscr{H}). \tag{4.80}$$

補題 4-33

(i)　各 $f \in \mathscr{H}$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ の任意のベクトルは，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ および $A(f)^\sharp$ の全解析ベクトルである．

(ii)　任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ と $f \in \mathscr{H}$ に対して，$e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi \in \mathscr{F}^\infty(\mathscr{H})$ であり，すべての $f_j \in \mathscr{H}$ $(j = 1, \cdots, m)$ に対して

$$A(f_1)^\sharp \cdots A(f_m)^\sharp e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} A(f_1)^\sharp \cdots A(f_m)^\sharp \Phi_{\mathrm{S}}(f)^m \Psi \qquad (4.81)$$

が成り立つ．

(iii)　任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ $(f, g \in \mathscr{H}, z \in \mathbb{C})$ に対して，$e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi$ は $\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ の全解析ベクトルである．さらに，すべての $w \in \mathbb{C}$ に対して，

$$e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}} e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{w^n z^m}{n!m!} \Phi_{\mathrm{S}}(g)^n \Phi_{\mathrm{S}}(f)^m \Psi \qquad (4.82)$$

が成り立つ．ここで，右辺は絶対収束していて，m, n についての和の順序の取り方に依存しない[15]．

証明　(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{2^n \text{項}} \underbrace{A(f)^\sharp \cdots A(f)^\sharp}_{n\text{ 個}}$$

という形に書ける．$\Psi_k = \{0, \cdots, 0, \Psi^{(k)}, 0, \cdots\}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ とすれば，

$$\underbrace{A(f)^\sharp \cdots A(f)^\sharp}_{n\text{ 個}} \Psi_k \in \bigoplus_{j=0}^{n+k} \bigotimes_{\mathrm{s}}^{j} \mathscr{H}$$

であるから，命題 4-25 によって，

$$\| \underbrace{A(f)^\sharp \cdots A(f)^\sharp}_{n\text{ 個}} \Psi_k \| \le \|f\| \, \| (N_{\mathrm{b}} + 1)^{1/2} \underbrace{A(f)^\sharp \cdots A(f)^\sharp}_{n-1\text{ 個}} \Psi_k \|$$

---

[15] ヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ のベクトル列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ について，$\sum_{n=1}^{\infty} \|\Psi_n\|_{\mathscr{X}} < \infty$ が成り立つとき，$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n$ は $\mathscr{X}$ において収束することが示される．この収束の仕方を**絶対収束**とよび，$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n$ は絶対収束するという．2 重ベクトル列 $\{\Psi_{n,m}\}_{n,m=1}^\infty \subset \mathscr{X}$ が絶対収束するとき，すなわち，$\sum_{n,m=1}^{\infty} \|\Psi_{n,m}\| < \infty$ のとき，各 n, m に対して，$\Phi_n := \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{n,m}$，$\Xi_m := \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{n,m}$ は絶対収束し，$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \sum_{m=1}^{\infty} \Xi_m$ が成り立つ．

$$\leq (n+k)^{1/2}\|f\| \| \underbrace{A(f)^\sharp \cdots A(f)^\sharp}_{n-1\text{ 個}} \Psi_k \|$$

$$\leq (n+k)^{1/2}(n-1+k)^{1/2}\cdots(1+k)^{1/2}\|f\|^n\|\Psi_k\|. \tag{4.83}$$

したがって，任意の $t>0$ に対して，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\Phi_{\rm S}(f)^n\Psi_k\|}{n!}t^n$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}t^n\|f\|^n}{n!}(n+k)^{1/2}(n-1+k)^{1/2}\cdots(1+k)^{1/2}\|\Psi_k\|.$$

級数に関するコーシー-ダランベールの比判定法により，右辺の級数は収束していることがわかる．したがって，Ψ_k は $\Phi_{\rm S}(f)$ の全解析ベクトルである．ゆえに，$\mathscr{F}_{\rm b,0}(\mathscr{H})$ の任意のベクトルは，$\Phi_{\rm S}(f)$ の全解析ベクトルである．$A(f)^\sharp$ についても同様．

(ii) $\Psi = \Psi_k$ の場合に示せば十分である．$\Xi_N := \sum_{m=0}^{N} z^m\Phi_{\rm S}(f)^m\Psi_k/m!$ とおくと (i) と補題 4-32 によって，

$$\lim_{N\to\infty}\Xi_N = e^{z\overline{\Phi_{\rm S}(f)}}\Psi_k.$$

明らかに，$\Xi_N \in D(A(f_1)^\sharp\cdots A(f_n)^\sharp)$ であり，

$$A(f_1)^\sharp\cdots A(f_n)^\sharp\Xi_N = \sum_{m=0}^{N}\frac{z^m}{m!}A(f_1)^\sharp\cdots A(f_n)^\sharp\Phi_{\rm S}(f)^m\Psi_k.$$

(4.83) と同様にして，

$$\| A(f_1)^\sharp\cdots A(f_n)^\sharp\Phi_{\rm S}(f)^m\Psi_k \|$$

$$\leq 2^{m/2}(n+m+k)^{1/2}(n+m-1+k)^{1/2}\cdots(1+k)^{1/2}$$

$$\times \|f_1\|\cdots\|f_n\|\|f\|^m\|\Psi_k\|. \tag{4.84}$$

これから，$A(f_1)^\sharp\cdots A(f_n)^\sharp\Xi_N$ は $N\longrightarrow\infty$ のとき収束することがわかる．$A(f_j)^\sharp$ は閉作用素であるから，$e^{z\overline{\Phi_{\rm S}(f)}}\Psi_k \in D(A(f_1)^\sharp\cdots A(f_n)^\sharp)$ かつ (4.81) が $\Psi=\Psi_k$ の場合に成り立つことになる (n についての帰納法で示せ)．

(iii) (ii) と同様，$\Psi=\Psi_k$ の場合について示せば十分である．(ii) によって，$e^{z\overline{\Phi_{\rm S}(f)}}\Psi_k \in D(\Phi_{\rm S}(g)^n)$ であり，

$$\Phi_{\mathrm{S}}(g)^n e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\Phi_{\mathrm{S}}(g)^n \Phi_{\mathrm{S}}(f)^m \Psi_k.$$

(4.84) と同様にして，

$$\begin{aligned} &\| \Phi_{\mathrm{S}}(g)^n \Phi_{\mathrm{S}}(f)^m \Psi_k \| \\ &\leq 2^{(n+m)/2}(n+m+k)^{1/2}(n+m-1+k)^{1/2}\cdots(1+k)^{1/2} \times \|g\|^n \|f\|^m \|\Psi_k\|. \end{aligned} \tag{4.85}$$

したがって，任意の $t>0$ に対して，

$$\begin{aligned} &\frac{t^n}{n!}\| \Phi_{\mathrm{S}}(g)^n e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi_k \| \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^n 2^{(n+m)/2}|z|^m \|g\|^n \|f\|^m}{n!m!} \\ &\qquad \times (n+m+k)^{1/2}(n+m-1+k)^{1/2}\cdots(1+k)^{1/2}\|\Psi_k\|. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)^n e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi_k\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^n 2^{(n+m)/2}|z|^m \|g\|^n \|f\|^m}{n!m!} \\ &\qquad \times (n+m+k)^{1/2}(n+m-1+k)^{1/2}\cdots(1+k)^{1/2}\|\Psi_k\| \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{2^{N/2}(t\|g\|+|z|\|f\|)^N}{N!}(k+1)^{1/2}\cdots(k+N)^{1/2}\|\Psi_k\| < \infty. \end{aligned}$$

よって，$e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi$ は $\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ の全解析ベクトルである．いまの評価から，(4.82) の右辺は絶対収束することも同時にわかるので，(4.82) が成立する． □

一般に，同一のヒルベルト空間上で働く N 個の線形作用素 $A_1,\cdots,A_N$ に対して，

$$\prod_{j=1}^{N} A_j := A_1\cdots A_N \tag{4.86}$$

と定義する．

補題 4-33 の証明と同様にして，次の定理が証明される (証明省略，問題 9)．

定理 4-34 N を任意の自然数，$f_k^{(j)} \in \mathscr{H}$ $(k=1,\cdots,n_j \in \mathbb{N})$, $z_j \in \mathbb{C}$, $g_j \in \mathscr{H}$ $(j=1,\cdots,N)$ を任意に固定し，

$$W := \prod_{j=1}^{N} A(f_1^{(j)})^\sharp \cdots A(f_{n_j}^{(j)})^\sharp e^{z_j \overline{\Phi_S(g_j)}}$$

とおく．このとき，すべての $\Psi \in \mathscr{F}_{b,0}(\mathscr{H})$ に対して，$\Psi \in D(W)$ である．さらに，任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して，$W\Psi$ は $\Phi_S(f)$ の全解析ベクトルであり，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$e^{z\overline{\Phi_S(f)}} W\Psi$$

$$= \sum_{n,m_j=0;j=1,\cdots,N}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Phi_S(f)^n \left(\prod_{j=1}^{N} A(f_1^{(j)})^\sharp \cdots A(f_{n_j}^{(j)})^\sharp \frac{z_j^{m_j} \Phi_S(g_j)^{m_j}}{m_j!} \right) \Psi.$$

ここで，ある一般的な事実を補題として述べる．

補題 4-35 $\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，A を $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，すべての $\psi \in D(A)$ に対して，

$$\|e^{iA}\psi - \psi\| \le \|A\psi\|$$

が成り立つ．

証明 E_A を A のスペクトル測度とすれば，作用素解析により，

$$\|e^{iA}\psi - \psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{i\lambda} - 1|^2 \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2.$$

一方，

$$|e^{i\lambda} - 1| \le |\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

であるから，

$$\|e^{iA}\psi - \psi\|^2 \le \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 = \|A\psi\|^2.$$

したがって，求める不等式を得る． □

定理 4-36 f, g を $\mathscr{H}$ の任意のベクトルとする．

(i) 任意の $z \in \mathbb{C}$ と $\Psi \in \mathscr{F}_{b,0}(\mathscr{H})$ に対して，

$$e^{z\overline{\Phi_S(f+g)}}\Psi = e^{-iz^2 \mathrm{Im}\langle f,g\rangle/2} e^{z\overline{\Phi_S(f)}} e^{z\overline{\Phi_S(g)}} \Psi. \tag{4.87a}$$

(ii) 作用素の等式

$$e^{i\overline{\Phi_S(f+g)}} = e^{i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle/2} e^{i\overline{\Phi_S(f)}} e^{i\overline{\Phi_S(g)}}, \tag{4.87b}$$

$$e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}} = e^{-i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}, \tag{4.87c}$$

が成立する．

(iii)(強連続性)　$f_n, f \in \mathscr{H}$, $f_n \longrightarrow f$ $(n \longrightarrow \infty)$ ならば，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ に対して，

$$e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)}}\Psi \longrightarrow e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi, \quad n \longrightarrow \infty. \tag{4.88}$$

証明　(i) 任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，補題 4-33 によって

$$\begin{aligned} e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\Psi &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{z^{n+m}}{n!m!}\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n\Phi_{\mathrm{S}}(g)^m\Psi \\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{z^N}{N!}\sum_{n=0}^{N}{}_NC_n\Phi_{\mathrm{S}}(f)^{N-n}\Phi_{\mathrm{S}}(g)^n\Psi. \end{aligned}$$

そこで，補題 4-31 を $X = \Phi_{\mathrm{S}}(f)$, $Y = \Phi_{\mathrm{S}}(g)$ として応用すれば (したがって，$\alpha = i\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle$),

$$\begin{aligned} e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\Psi &= \sum_{N=0}^{\infty}z^N\sum_{k,r\geq 0;2r+k=N}\frac{1}{k!r!}\left(\frac{i\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle}{2}\right)^r\Phi_{\mathrm{S}}(f+g)^k\Psi \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2r}}{r!}\left(\frac{i\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle}{2}\right)^r\frac{z^k}{k!}\Phi_{\mathrm{S}}(f+g)^k\Psi \\ &= e^{z^2 i\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle/2}e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f+g)}}\Psi. \end{aligned}$$

したがって，(4.87a) が導かれる．

(ii) (4.87a) で $z = i$ の場合を考えると，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ 上で (4.87b) が成り立つ．$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ は稠密であり，$e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(h)}}$ $(h \in \mathscr{H})$ はユニタリ作用素であるから，稠密に定義された有界作用素の拡大の一意性により，(4.87b) が得られる．

(4.87b) と $e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f+g)}} = e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g+f)}}$ によって，

$$e^{i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle/2}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}} = e^{i\mathrm{Im}\langle g,f\rangle/2}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}.$$

これと $\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle = -\mathrm{Im}\,\langle g,f\rangle$ から (4.87c) がしたがう．

(iii) まず，$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ の場合を考える．直接の計算から，

$$\| e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)}}\Psi - e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi \|^2 = 2\|\Psi\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle \Psi, e^{-i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)}}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi\rangle.$$

(4.87b) によって，

$$e^{-i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)}}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi = e^{i\mathrm{Im}\,\langle f_n,f\rangle/2}e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f-f_n)}}\Psi$$

であるから，

$$\|e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)}}\Psi - e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi\|^2 = 2\|\Psi\|^2 - 2\mathrm{Re}\left\{e^{i\mathrm{Im}\,\langle f_n, f\rangle/2}\langle\Psi, e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f-f_n)}}\Psi\rangle\right\}.$$

補題 4-35 と定理 4-30 (iii) により，

$$\|e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f-f_n)}}\Psi - \Psi\| \le \|\Phi_{\mathrm{S}}(f-f_n)\Psi\| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

したがって，(4.88) がしたがう．$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ は稠密であり，$\sup_{n\ge1}\|e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)}}\| = 1 < \infty$ であるから，付録 A の命題 A-2 によって，(4.88) が得られる．□

(4.87c) は，ユニタリ作用素 $e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}$ と $e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}$ の交換特性をあたえる．これを **Weyl (ヴァイル) 関係式**とよぶ．

系 4-37　すべての $f \in \mathscr{H}$ $(z \in \mathbb{C})$ と $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，

$$e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{-z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi = e^{-z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi = \Psi.$$

証明　(4.87a) において，$g = -f$ とし，$\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(0)} = 0$, $\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(-f)} = -\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ を用いればよい．□

次の定理にうつる前に，交換関係を扱う際の 1 つの基本的な事柄を述べておく．$\mathfrak{A}$ を代数，$A \in \mathfrak{A}$ とする．$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$\mathrm{ad}^n(A) : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ を次のように帰納的に定義する：

$$\mathrm{ad}^0(A)B := B, \quad \mathrm{ad}^n(A)B := [A, \mathrm{ad}^{n-1}(A)B], \quad B \in \mathfrak{A},\ n \ge 1. \tag{4.89}$$

作用素 $\mathrm{ad}^n(A)$ を A に同伴する n 次の**随伴作用素** (adjoint operator) という．

補題 4-38　任意の $A, B \in \mathfrak{A}$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\sum_{n=0}^{N} {}_N C_n (-1)^{N-n} A^n B A^{N-n} = \mathrm{ad}^N(A)B$$

が成り立つ．

証明　帰納法によればよい．この場合にも漸化式 (4.73) が使われる．詳細は読者の演習とする (問題 10)．□

定理 4-39　すべての $z \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathscr{H}$ と $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して

$$e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}A(g)e^{-z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi = \left(A(g) - \frac{z}{\sqrt{2}}\langle g, f\rangle\right)\Psi, \tag{4.90a}$$

$$e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}A(g)^* e^{-z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi = \left(A(g)^* + \frac{z}{\sqrt{2}}\langle f, g\rangle\right)\Psi. \tag{4.90b}$$

証明　定理 4-34 によって,

$$\begin{aligned}
&e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}A(g)e^{-z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{n+m}}{n!m!}\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n A(g)\Phi_{\mathrm{S}}(f)^m\Psi \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{z^N}{N!}\left(\sum_{n=0}^{N} {}_N C_n(-1)^{N-n}\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n A(g)\Phi_{\mathrm{S}}(f)^{N-n}\Psi\right).
\end{aligned}$$

$A = \Phi_{\mathrm{S}}(f)$, $B = A(g)$ として, 補題 4-38 を応用すれば,

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(f), A(g)]\Phi = -\frac{\langle g, f\rangle}{\sqrt{2}}\Phi, \quad \Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}) \tag{4.91}$$

であるから,

$$\sum_{n=0}^{N} {}_N C_n(-1)^{N-n}\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n A(g)\Phi_{\mathrm{S}}(f)^{N-n}\Psi = \begin{cases} A(g)\Psi & (N=0) \\ -\dfrac{\langle g, f\rangle}{\sqrt{2}}\Psi & (N=1) \\ 0 & (N \geq 2). \end{cases}$$

したがって, (4.90a) が得られる. (4.90b) についても同様. □

ここで, 以下でよく使われる, ある一般的な事実を述べておく.

補題 4-40　$\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ をヒルベルト空間, U を $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ へのユニタリ作用素, A_1, A_2 をそれぞれ, $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ 上の閉作用素とする. A_1 の芯 $\mathscr{D}_1$ と A_2 の芯 $\mathscr{D}_2$ で, 任意の $\Psi \in \mathscr{D}_1$, $\Phi \in \mathscr{D}_2$ に対して

$$UA_1U^{-1}\Phi = A_2\Phi, \quad A_1\Psi = U^{-1}A_2U\Psi, \tag{4.92}$$

が成り立つものが存在するとする. このとき, 作用素の等式

$$UA_1U^{-1} = A_2 \tag{4.93}$$

が成立する.

証明　任意の $\Phi \in D(A_2)$ に対して, $\Phi_n \longrightarrow \Phi$, $A_2\Phi_n \longrightarrow A_2\Phi$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる $\Phi_n \in D_2$ がとれる. (4.92) の第 1 式より, $UA_1U^{-1}\Phi_n = A_2\Phi_n$. したがって, $UA_1U^{-1}\Phi_n \longrightarrow A_2\Phi$ $(n \longrightarrow \infty)$. U^{-1} は有界であるから, $A_1U^{-1}\Phi_n \longrightarrow$

$U^{-1}A_2\Phi$ $(n \longrightarrow \infty)$．また，$U^{-1}\Phi_n \longrightarrow U^{-1}\Phi$ $(n \longrightarrow \infty)$．$A_1$ は閉であるから，これは，$U^{-1}\Phi \in D(A_1)$ かつ $A_1U^{-1}\Phi = U^{-1}A_2\Phi$ を意味する．したがって，$A_2 \subset UA_1U^{-1}$．同様に，(4.92) の第 2 式は $A_1 \subset U^{-1}A_2U$，すなわち，$UA_1U^{-1} \subset A_2$ を意味する．ゆえに作用素の等式 (4.93) を得る． □

系 4-41 すべての $f, g \in \mathscr{H}$ に対して作用素の等式

$$e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(if)}}A(g)e^{-i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(if)}} = A(g) + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle g, f\rangle, \tag{4.94a}$$

$$e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(if)}}A(g)^*e^{-i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(if)}}\Psi = A(g)^* + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle f, g\rangle, \tag{4.94b}$$

が成り立つ．

証明 (4.90a) で，$z \longrightarrow i$, $f \longrightarrow if$ の置き換えをすると，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ 上で

$$e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(if)}}A(g)e^{-i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(if)}} = A(g) + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle g, f\rangle$$

が成り立つ．この式で，$f \longrightarrow -f$ と置き換えることにより，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ 上で

$$A(g) = e^{-i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(if)}}\left(A(g) + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle g, f\rangle\right)e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(if)}}$$

が成り立つことがわかる．$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ は，$A(g)$ および $A(g) - \langle g, f\rangle/\sqrt{2}$ の芯であるから[16]，補題 4-40 を応用することにより，作用素の等式 (4.94a) を得る．(4.94b) についても同様[17]． □

定理 4-42 すべての $f, g \in \mathscr{H}$, z, $w \in \mathbb{C}$ と $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，

$$e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\Psi = e^{izw\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle}e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Psi$$

が成り立つ．

証明 次の計算は意味をもつ：

$$\begin{aligned}
e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\Psi &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\Psi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\left(e^{-w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\Phi_{\mathrm{S}}(f)e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\right)^n\Psi.
\end{aligned}$$

---

[16] 一般に，A を閉作用素，B を有界作用素とするとき，$A + B$ は閉作用素であり，A の任意の芯は $A + B$ の芯である．新井-江沢 (1999a) の定理 2.5，定理 2.9 を参照．

[17] A をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された任意の閉作用素とするとき，任意のユニタリ作用素 $U : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{K}$ ($\mathscr{K}$ はヒルベルト空間) に対して，作用素の等式 $(UAU^{-1})^* = UA^*U^{-1}$ が成立する (新井-江沢 (1999a) の補題 2.35)．これを応用してもよい．

定理 4-39 によって,

$$e^{-w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\Phi_{\mathrm{S}}(f)e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\Psi = (\Phi_{\mathrm{S}}(f) + iw\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle)\,\Psi.$$

したがって,

$$\begin{aligned} e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\Psi &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\left(\Phi_{\mathrm{S}}(f) + iw\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle\right)^n\Psi \\ &= e^{w\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}e^{z(\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}+iw\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle)}\Psi. \end{aligned}$$

ゆえに求める式を得る. □

定理 4-43 $f, g \in \mathscr{H}$ とする. このとき, $\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ と $\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}$ が強可換であるための必要十分条件は, $\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle = 0$ となることである.

証明 任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して, (4.87c) において, $f \longrightarrow sf$, $g \longrightarrow tg$ の置き換えをすることにより,

$$e^{is\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{it\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}} = e^{-ist\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle}e^{it\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}e^{is\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}.$$

この事実と命題 2-16 により, 題意が成立する. □

4-6-3 スペクトル

Segal の場の作用素のスペクトルを調べる. 補題を用意する.

補題 4-44 すべての $f, g \in \mathscr{H}$ に対して, 作用素の等式

$$e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}}\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}e^{-i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(g)}} = \overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)} - \mathrm{Im}\,\langle g, f\rangle,$$

が成り立つ.

証明 系 4-41, (4.94a), (4.94b) で $if \longrightarrow g$, $g \longrightarrow f$ と置き換えたものを加えればよい. □

定理 4-45 すべての $f \in \mathscr{H}$ $(f \neq 0)$ に対して,

$$\sigma(\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}) = \mathbb{R}, \tag{4.95}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}) = \varnothing. \tag{4.96}$$

証明　t を任意の実数とし，補題 4-44 において，$g = itf$ とすれば

$$e^{i\overline{\Phi_S(itf)}}\overline{\Phi_S(f)}e^{-i\overline{\Phi_S(itf)}} = \overline{\Phi_S(f)} + t\|f\|^2. \tag{4.97}$$

これは，$\overline{\Phi_S(f)}$ と $\overline{\Phi_S(f)} + t\|f\|^2$ がユニタリ同値であることを意味する．したがって，

$$\sigma(\overline{\Phi_S(f)}) = \sigma(\overline{\Phi_S(f)} + t\|f\|^2) = \{\lambda + t\|f\|^2 \mid \lambda \in \sigma(\overline{\Phi_S(f)})\}.$$

$\overline{\Phi_S(f)}$ は自己共役であるから，$\sigma(\overline{\Phi_S(f)}) \neq \varnothing$．さらに，$t \in \mathbb{R}$ は任意であったから，(4.95) がしたがう．

仮に，$\sigma_p(\overline{\Phi_S(f)}) \neq \varnothing$ とし，$\lambda \in \sigma_p(\overline{\Phi_S(f)})$ とすれば，(4.97) により，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\lambda + t\|f\|^2 \in \sigma_p(\overline{\Phi_S(f)})$．この固有値に属する，規格化された固有ベクトルの 1 つを Ψ_t とすれば，$\{\Psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は正規直交系をなす．しかし，可分なヒルベルト空間における正規直交系の濃度は高々可算無限であるから[18]，これは矛盾である ($\mathscr{H}$ が可分であることにより，$\mathscr{F}_b(\mathscr{H})$ は可分である — 命題 3-1 (ii) の応用)．したがって，(4.96) が成立する．　□

4-6-4　第 2 種の第 2 量子化作用素による変換

$\mathscr{K}$ をヒルベルト空間とし，U を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ へのユニタリ作用素とする．このとき，第 2 種の第 2 量子化作用素 $\Gamma(U) : \mathscr{F}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathscr{K})$ はユニタリである (命題 3-12 (ii))．$\Gamma(U)$ を $\mathscr{F}_b(\mathscr{H})$ に制限したものを $\Gamma_b(U)$ と書く：

$$\Gamma_b(U) := \Gamma(U) \restriction \mathscr{F}_b(\mathscr{H}). \tag{4.98}$$

定理 4-16 (ii) と同様にして，$\Gamma_b(U)$ は $\mathscr{F}_b(\mathscr{H})$ から $\mathscr{F}_b(\mathscr{K})$ へのユニタリ作用素であることが示される．

命題 4-46　任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して，作用素の等式

$$\Gamma_b(U)A_{\mathscr{H}}(f)\Gamma_b(U)^{-1} = A_{\mathscr{K}}(Uf), \tag{4.99a}$$

$$\Gamma_b(U)A_{\mathscr{H}}(f)^*\Gamma_b(U)^{-1} = A_{\mathscr{K}}(Uf)^*, \tag{4.99b}$$

が成り立つ．ただし，$A_{\mathscr{H}}(f)$ は $\mathscr{F}_b(\mathscr{H})$ における消滅作用素を表す．特に，

$$\Gamma_b(U)\overline{\Phi_{S,\mathscr{H}}(f)}\Gamma_b(U)^{-1} = \overline{\Phi_{S,\mathscr{K}}(Uf)}. \tag{4.100}$$

ただし，$\Phi_{S,\mathscr{H}}(f)$ は $\mathscr{F}_b(\mathscr{H})$ における Segal の場の作用素を表す．

---

[18] 2 章の脚注 33 を参照.

証明　任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$, $f \in \mathscr{H}$ に対して，

$$(\Gamma_{\mathrm{b}}(U)A_{\mathscr{H}}(f)^*\Psi)^{(n)} = \sqrt{n+1}\,S_{n+1}(Uf \otimes (\otimes^n U\Psi^{(n)}))$$
$$= (A_{\mathscr{K}}(Uf)^*\Gamma_{\mathrm{b}}(U)\Psi)^{(n)}.$$

したがって，$\Gamma_{\mathrm{b}}(U)A_{\mathscr{H}}(f)^*\Psi = A_{\mathscr{K}}(Uf)^*\Gamma_{\mathrm{b}}(U)\Psi$．任意の $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{K})$ に対して，$\Gamma_{\mathrm{b}}(U)^{-1}\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ であるから，$\Gamma(U)A_{\mathscr{H}}(f)^*\Gamma_{\mathrm{b}}(U)^{-1}\Phi = A_{\mathscr{K}}(Uf)^*\Phi$ が得られる．同様に，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，$A_{\mathscr{H}}(f)^*\Psi = \Gamma_{\mathrm{b}}(U)^{-1}$ $A_{\mathscr{K}}(Uf)^*\Gamma_{\mathrm{b}}(U)\Psi$．$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ は $A_{\mathscr{H}}(\cdot)^*$ の芯であるから，補題 4-40 を応用することにより，(4.99b) が得られる．(4.99a) は (4.99b) の共役をとることによって得られる．

(4.100) は (4.99a), (4.99b) と補題 2-32 を使って証明される．　□

定理 4-47　$U : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{K}$ をユニタリ作用素，T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，作用素の等式

$$\Gamma_{\mathrm{b}}(U)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Gamma_{\mathrm{b}}(U)^{-1} = d\Gamma_{\mathrm{b}}(UTU^{-1})$$

が成立する．

証明　一般に，A をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の自己共作用素，W を $\mathscr{X}$ からヒルベルト空間 $\mathscr{Y}$ へのユニタリ作用素とすれば，

$$We^{itA}W^{-1} = e^{itWAW^{-1}}$$

が成り立つ (新井 (1997a) の p.126, (3.33) を参照)．これを応用し，定理 4-17 (i) を使えば，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{it\Gamma_{\mathrm{b}}(U)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Gamma_{\mathrm{b}}(U)^{-1}} = \Gamma_{\mathrm{b}}(U)e^{itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)}\Gamma_{\mathrm{b}}(U)^{-1} = \Gamma_{\mathrm{b}}(U)\Gamma(e^{itT})\Gamma_{\mathrm{b}}(U)^{-1}$$
$$= \Gamma_{\mathrm{b}}(Ue^{itT}U^{-1}) = \Gamma_{\mathrm{b}}(e^{itUTU^{-1}})$$
$$= e^{itd\Gamma_{\mathrm{b}}(UTU^{-1})}.$$

したがって，求める結果を得る．　□

定理 4-47 は別の方法で証明することもできる (問題 12 を参照)．

4-6-5　第 2 量子化作用素が生成する強連続ユニタリ群による変換

T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし，各 $t \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\Phi_{\mathrm{S}}(t, f) := e^{itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)} \Phi_{\mathrm{S}}(f) e^{-itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)} \tag{4.101}$$

を定義する．

場の量子論への応用では，t は時間パラメータ，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は自由場のハミルトニアンを表し，$e^{-itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)}$ はこのハミルトニアンによる状態の時間発展を司る強連続 1 パラメータユニタリ群である．この解釈では，$\Phi_{\mathrm{S}}(t, f)$ は Segal 場 $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ の時間発展を記述することになる (ハイゼンベルク描像)．

作用素 $\Phi_{\mathrm{S}}(t, f)$ の t についての強微分可能性を調べ，これがみたす微分方程式を求めたい[19)]．

補題 4-48　すべての $t \in \mathbb{R}, f \in \mathscr{H}$ に対して，作用素の等式

$$e^{itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)} A(f)^{\sharp} e^{-itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)} = A(e^{itT} f)^{\sharp}$$

が成立する．

証明　命題 4-46 を $U = e^{itT}$ として応用すればよい．　□

補題 4-48 と命題 4-25 により，$D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ 上で，

$$\Phi_{\mathrm{S}}(t, f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A(e^{itT} f)^* + A(e^{itT} f) \right) \tag{4.102}$$

が成立する．したがって，右辺の t についての微分可能性を調べればよい．

補題 4-49　$n \in \mathbb{N}$，S を $\mathscr{H}$ 上の単射な非負自己共役作用素で T と強可換なものとする．任意の $f \in D(S^{-1/2} T^n) \cap D(S^{-1/2})$ と $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2})$ に対して，$\mathbb{R}$ 上のベクトル値関数：$t \longrightarrow A(e^{itT} f)^{\sharp} \Psi$ は n 回強微分可能であり，

$$\frac{d^n}{dt^n} A(e^{itT} f)^{\sharp} \Psi = A(i^n e^{itT} T^n f)^{\sharp} \Psi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.103}$$

が成立する．

証明　$F(t) = A(e^{itT} f)^{\sharp} \Psi$ とおくと，任意の $t, \varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} - A(ie^{itT} T f)^{\sharp} \Psi = A(h_{\varepsilon}(t; f))^{\sharp} \Psi.$$

[19)] 強微分の概念と関連する事柄については，新井 (1997a) の 4 章 4.3 節を参照されたい．

ただし，

$$h_\varepsilon(t;f) = e^{itT}\left\{\frac{(e^{i\varepsilon T}-1)f}{\varepsilon} - iTf\right\}.$$

S と T は強可換であるから，$S^{-1/2}$ と T も強可換であり，

$$e^{itT}S^{-1/2} \subset S^{-1/2}e^{itT}, \quad t \in \mathbb{R}$$

および

$$[S^{-1/2}, T] = 0 \quad (D(S^{-1/2}T) \cap D(S^{-1/2}) \text{ 上})$$

が成り立つ[20]．したがって $h_\varepsilon(t;f) \in D(S^{-1/2})$ であり $S^{-1/2}h_\varepsilon(t;f) = h_\varepsilon(t;S^{-1/2}f)$ である．命題 4-24 によって，

$$\begin{aligned}\|A(h_\varepsilon(t;f))^\sharp\Psi\| &\le \|S^{-1/2}h_\varepsilon(t;f)\|\,\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2}\Psi\| + \|h_\varepsilon(t;f)\|\,\|\Psi\| \\ &= \|h_\varepsilon(t;S^{-1/2}f)\|\,\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2}\Psi\| + \|h_\varepsilon(t;f)\|\,\|\Psi\|.\end{aligned}$$

一方，T のスペクトル表示を用いる作用素解析を用いて，$\|h_\varepsilon(t;S^{-1/2}f)\| \longrightarrow 0$ ($\varepsilon \longrightarrow 0$) を示すのは難しくない．したがって，$F(t)$ は強微分可能であり，(4.103) で $n=1$ の場合が成立する．以下，同様にして，一般の n に対して，(4.103) が示される． □

注意 4-9 上の補題では，$S = I$ にとるのが標準的である．この場合には，T との強可換性は自明であり，(4.103) は任意の $\Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して成り立つことになる．また，もう 1 つ，強可換性が自明な場合として，$S = T$ の場合がある．

(4.102) と補題 4-49 から次の定理が得られる．

定理 4-50 S を補題 4-49 のものとし，$f \in D(S^{-1/2}T^2) \cap D(S^{-1/2})$ とする．このとき，任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2})$ に対して，ベクトル値関数：$t \longrightarrow \Phi_{\mathrm{S}}(t,f)\Psi$ は 2 回強微分可能であり，微分方程式

$$\frac{d}{dt}\Phi_{\mathrm{S}}(t,f)\Psi = \Phi_{\mathrm{S}}(t,iTf)\Psi,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi_{\mathrm{S}}(t,f)\Psi + \Phi_{\mathrm{S}}(t,T^2f)\Psi = 0$$

をみたす．

この定理に述べられた微分方程式は，物理的には，Segal 場の “時間発展” を支配す

[20] 新井-江沢 (1999b) の補題 3.12，定理 3.14，定理 3.15 を参照．

る微分方程式であり，場の量子論への応用においては，量子化された自由場の方程式をあたえる (8 章，9 章を参照).

4-6-6　真空期待値

ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の線形作用素 X に対して，$\Omega_{\mathscr{H}} \in D(X)$ ならば，$\langle \Omega_{\mathscr{H}}, X\Omega_{\mathscr{H}} \rangle$ という量が定義される．これをフォック真空 $\Omega_{\mathscr{H}}$ に関する，X の**真空期待値** (vacuum expectation value) と呼ぶ (誤解のおそれのない場合は単に真空期待値という).

Segal 場の積の真空期待値を計算しよう.

定理 4-51

(i)　任意の $f_j \in \mathscr{H}$ $(j=1,2,\cdots)$ と自然数 n に対して，

$$\langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_{2n-1})\Omega_{\mathscr{H}} \rangle = 0, \tag{4.104a}$$

$$\langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_{2n})\Omega_{\mathscr{H}} \rangle = \frac{1}{2^n}\sum_{\mathrm{comb}} \langle f_{i_1}, f_{j_1}\rangle \cdots \langle f_{i_n}, f_{j_n}\rangle. \tag{4.104b}$$

ただし，$\sum_{\mathrm{comb}}$ は，$(1,\cdots,2n)$ を n 個の異なる対 $(i_1,j_1),\cdots,(i_n,j_n)$ $(i_k<j_k, k=1,\cdots,n)$ に分ける仕方の全体 $((2n)!/(2^n n!)$ 通り) にわたる和を表す.

(ii)　すべての $f \in \mathscr{H}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\langle \Omega_{\mathscr{H}}, e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega_{\mathscr{H}} \rangle = e^{z^2\|f\|^2/4}. \tag{4.105}$$

証明　(i) (4.17) と (4.91) を用いると，

$$\begin{aligned}
&\langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_m)\Omega_{\mathscr{H}} \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \Omega_{\mathscr{H}}, A(f_1)\Phi_{\mathrm{S}}(f_2)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_m)\Omega_{\mathscr{H}} \rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m}\langle f_1, f_j\rangle\langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\mathrm{S}}(f_2)\cdots\widehat{\Phi_{\mathrm{S}}(f_j)}\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_m)\Omega_{\mathscr{H}} \rangle.
\end{aligned}$$

以下，この計算を繰り返していき，(4.17) から得られる式

$$\langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Omega_{\mathscr{H}} \rangle = 0$$

に注意すれば，(4.104a), (4.104b) を得る (より厳密には数学的帰納法による).

(ii) (i) から

$$\langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\mathrm{S}}(f)^{2n}\Omega_{\mathscr{H}} \rangle = \frac{(2n)!}{4^n n!}\|f\|^{2n}, \tag{4.106a}$$

$$\langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\mathrm{S}}(f)^{2n+1}\Omega_{\mathscr{H}} \rangle = 0, \quad n \geq 0. \tag{4.106b}$$

補題 4-33 (i) によって,

$$\langle \Omega_{\mathscr{H}}, e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega_{\mathscr{H}} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \Omega_{\mathscr{H}} \rangle.$$

これに (4.106a), (4.106b) を代入すれば (4.105) が得られる. □

4-6-7 コーヒーレント・ベクトル

各 $f \in \mathscr{H}$ に対して, 補題 4-33 (i) によって,

$$\exp f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(f)^{*n}}{n!}\Omega_{\mathscr{H}} \tag{4.107}$$

は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ において収束する. この型のベクトルを**コーヒーレント・ベクトル** (coherent vector) という.

定義からわかるように, コーヒーレント・ベクトル $\exp f$ は, 量子力学的に言えば, ボソンの n 粒子状態 $\Psi^{(n)} \neq 0$ ($\Psi^{(n)} \in \overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} \mathscr{H}$) を確率

$$\frac{|\langle \Psi^{(n)}, \exp f \rangle|^2}{\|\Psi^{(n)}\|^2 \|\exp f\|^2} = \frac{|\langle \Psi^{(n)}, A(f)^{*n}\Omega_{\mathscr{H}} \rangle|^2}{n!^2 \|\Psi^{(n)}\|^2 \|\exp f\|^2}$$

で含むような状態である. 場の量子論の文脈では, コーヒーレント・ベクトル, あるいはそのある種の変形によって表される状態は, **コーヒーレント状態**とよばれ, 巨視的 (マクロ) なスケールにおいて, 波動的描像での位相が "小さい精度" で確定している状態を表す.

内積の連続性と

$$\langle A(f)^{*n}\Omega_{\mathscr{H}}, A(g)^{*m}\Omega_{\mathscr{H}} \rangle = \delta_{mn} n! \langle f, g \rangle^n \tag{4.108}$$

を使えば,

$$\langle \exp f, \exp g \rangle = e^{\langle f, g \rangle}, \quad f, g \in \mathscr{H}, \tag{4.109}$$

がわかる. また,

$$\langle A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}, \exp f \rangle = \prod_{j=1}^{n} \langle f_j, f \rangle. \tag{4.110}$$

命題 4-52

(i) $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{H}$ が 1 次独立ならば, $\exp f_1, \cdots, \exp f_n$ は 1 次独立である.

(ii)　$\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の任意の稠密な部分空間とするとき，

$$\exp(\mathscr{D}) := \mathscr{L}\{\exp f \mid f \in \mathscr{D}\}$$

($\{\exp f \mid f \in \mathscr{D}\}$ によって生成される部分空間) は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ で稠密である．

証明　(i) $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \exp f_j = 0$ とせよ ($\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \cdots, n$)．このとき，すべての $m \geq 1$ に対して，$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A(f_j)^{*m} \Omega_{\mathscr{H}} = 0$．したがって，特に，$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A(f_j)^{*} \Omega_{\mathscr{H}} = 0$．これは $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0$ を意味する．$f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{H}$ は 1 次独立であるから，$\alpha_j = 0$ $(j = 1, \cdots, n)$ がでる．

(ii) $\Psi \in \exp(\mathscr{D})^{\perp}$ としよう．このとき，$\Psi = 0$ を示せばよい．いまの条件は，任意の $f \in \mathscr{D}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して，$\langle \Psi, \exp(zf) \rangle = 0$，すなわち，

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\langle \Psi^{(n)}, A(f)^{*n} \Omega_{\mathscr{H}} \rangle}{n!} = 0$$

を意味する．したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，

$$\langle \Psi^{(n)}, A(f)^{*n} \Omega_{\mathscr{H}} \rangle = 0. \qquad (*)$$

したがって，まず，$n = 0$ の場合を考えると，$\Psi^{(0)} = 0$．$n \geq 1$ としよう．$f \in \mathscr{D}$ は任意でよいから，特に，$z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ と $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{D}$ を任意にとり，$(*)$ において $f = \sum_{j=1}^{n} z_j f_j$ とすれば，$A(g)^*$ の g に関する線形性により，$\left\langle \Psi^{(n)}, \left(\sum_{j=1}^{n} z_j A(f_j)^* \right)^n \Omega_{\mathscr{H}} \right\rangle = 0$．したがって，

$$\sum_{l_1 + \cdots + l_n = n} \frac{z_1^{l_1} \cdots z_n^{l_n}}{l_1! \cdots l_n!} a_{l_1 \cdots l_n} = 0.$$

ただし，$a_{l_1 \cdots l_n} := \langle \Psi^{(n)}, A(f_1)^{*l_1} \cdots A(f_n)^{*l_n} \Omega_{\mathscr{H}} \rangle$．両辺を $z_1, \cdots, z_n$ で微分することにより，$l_1 = \cdots = l_n = 1$ に対して，$a_{l_1 \cdots l_n} = 0$ を得る．したがって，$\langle \Psi^{(n)}, A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}} \rangle = 0$．$A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}$ $(f_j \in \mathscr{D}$, $j = 1, \cdots, n)$ という形のベクトルによって生成される部分空間は $\otimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H}$ で稠密であるから，$\Psi^{(n)} = 0$ でなければならない．よって $\Psi = 0$ がしたがう．　□

命題 4-53　すべての $f, g \in \mathscr{H}$ に対して，$\exp f \in D(A(g))$ であり，

$$A(g) \exp f = \langle g, f \rangle \exp f.$$

すなわち，$\exp f$ は，消滅作用素 $A(g)$ の固有値 $\langle g, f\rangle$ に属する固有ベクトルである．

証明 $\sum_{n=0}^{\infty} A(g)A(f)^{*n}\Omega_{\mathscr{H}}/n!$ が収束することと（補題 4-33 (ii) の証明を参照）$A(g)$ の閉性および CCR を用いると，

$$A(g)\exp f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(g)A(f)^{*n}\Omega_{\mathscr{H}}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\langle g, f\rangle A(f)^{*n-1}\Omega_{\mathscr{H}}}{n!}.$$

したがって，題意が成立する．□

次の命題は，コーヒーレント・ベクトルと Segal の場の作用素の関係をあたえる．

命題 4-54 すべての $z \in \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{H}$ に対して，

$$e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Omega_{\mathscr{H}} = e^{\|f\|^2 z^2/4}\exp\left(\frac{zf}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.111}$$

証明 $F(z) := e^{-\|f\|^2 z^2/4} e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Omega_{\mathscr{H}}$ とおくと，補題 4-33 (i) によって，

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\|f\|^2 z^2/4} z^n \frac{\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n}{n!}\Omega_{\mathscr{H}}. \tag{4.112}$$

これから，$F(z)$ は z に関して強微分可能であり，

$$\frac{dF(z)}{dz} = -\frac{\|f\|^2 z}{2}F(z) + \frac{A(f)^*}{\sqrt{2}}F(z) + \frac{A(f)}{\sqrt{2}}F(z)$$

であることがわかる．一方，定理 4-39 と (4.17) により，

$$\begin{aligned}\frac{A(f)}{\sqrt{2}}F(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\|f\|^2 z^2/4} e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}} \cdot e^{-z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}} A(f) e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\Omega_{\mathscr{H}} \\ &= \frac{\|f\|^2 z}{2}F(z).\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{A(f)^*}{\sqrt{2}}F(z).$$

以下，同様に，$F(z)$ は z に関して無限回強微分可能であり，

$$F^{(n)}(z) := \frac{d^n F(z)}{dz^n} = \left(\frac{A(f)^*}{\sqrt{2}}\right)^n F(z), \quad n \in \mathbb{N},$$

が成立することがわかる．特に，

$$F^{(n)}(0) = \left(\frac{A(f)^*}{\sqrt{2}}\right)^n \Omega_{\mathscr{H}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

他方，(4.112) から $F(z)$ はベクトル値関数として z について解析的であることがわかるから，

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

と書ける．これに上の結果を代入すれば，$F(z) = \exp(zf/\sqrt{2})$ を得る．したがって，(4.111) がしたがう． □

4-7 節　直和ヒルベルト空間上のボソンフォック空間

2 つの可分なヒルベルト空間 $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ の直和

$$\mathscr{H} \oplus \mathscr{K} = \{(f,g) \mid f \in \mathscr{H}, g \in \mathscr{K}\}$$

上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{K})$ を考察することは純理論的にも応用上も重要である．$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の消滅作用素を $A_{\mathscr{H}}(\cdot)$ のように表す．

定理 4-55　ユニタリ作用素 $U : \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}) \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{K})$ で次の性質をみたすものがただ 1 つ存在する：

(i)

$$U\Omega_{\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}} = \Omega_{\mathscr{H}} \otimes \Omega_{\mathscr{K}}. \tag{4.113}$$

(ii)

$$U\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}) = \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{H}) \hat{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{K}) \tag{4.114}$$

かつ任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{H}) \hat{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{K})$ に対して，

$$UA_{\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}}(f,g)^{\sharp}U^{-1}\Psi = \left[A_{\mathscr{H}}(f)^{\sharp} \otimes I + I \otimes A_{\mathscr{K}}(g)^{\sharp}\right]\Psi. \tag{4.115}$$

証明　証明を通して，$A(f,g) := A_{\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}}(f,g)$ $((f,g) \in \mathscr{H} \oplus \mathscr{K})$ とおく．$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ をそれぞれ，$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ の CONS とする．このとき，$\{(e_n,0),(0,\xi_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$ の CONS である．したがって，命題 4-1 と (4.18) の応用により，

$$C_{i_1 \cdots i_n; j_1 \cdots j_m} A(e_{i_1},0)^* \cdots A(e_{i_n},0)^* A(0,\xi_{j_1})^* \cdots A(0,\xi_{j_m})^* \Omega_{\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}},$$

$$i_1 \le \cdots \le i_n,\ j_1 \le \cdots \le j_m,\ i_k, j_l \in \mathbb{N}, n, m \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{K})$ の CONS をなす．ただし，

$$C_{i_1\cdots i_n;j_1\cdots j_m} := \|A(e_{i_1},0)^*\cdots A(e_{i_n},0)^*A(0,\xi_{j_1})^*\cdots A(0,\xi_{j_m})^*\Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}\|^{-1}.$$

同様に,

$$C_{i_1\cdots i_n;j_1\cdots j_m}A_{\mathscr{H}}(e_{i_1})^*\cdots A_{\mathscr{H}}(e_{i_n})^*\Omega_{\mathscr{H}}\otimes A_{\mathscr{K}}(\xi_{j_1})^*\cdots A_{\mathscr{K}}(\xi_{j_m})^*\Omega_{\mathscr{K}},$$

$$i_1\le\cdots\le i_n,\ j_1\le\cdots\le j_m,\ i_k,j_l\in\mathbb{N}, n,m\in\{0\}\cup\mathbb{N},$$

は, $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{K})$ の CONS をなす. したがって, ユニタリ作用素 $U:\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}\oplus\mathscr{K})\longrightarrow\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{K})$ で, すべての m, $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, i_k, $j_l\in\mathbb{N}$ に対して

$$UA(e_{i_1},0)^*\cdots A(e_{i_n},0)^*A(0,\xi_{j_1})^*\cdots A(0,\xi_{j_m})^*\Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}$$
$$=A_{\mathscr{H}}(e_{i_1})^*\cdots A_{\mathscr{H}}(e_{i_n})^*\Omega_{\mathscr{H}}\otimes A_{\mathscr{K}}(\xi_{j_1})^*\cdots A_{\mathscr{K}}(\xi_{j_m})^*\Omega_{\mathscr{K}}$$

みたすものがただ 1 つ存在する. 特に, (4.113) が成立する. 任意の $f_j\in\mathscr{H}, g_j\in\mathscr{K}$ に対して, $f_j=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(j)}e_n$, $g_k=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{(k)}\xi_n$ ($a_n^{(j)}=\langle e_n,f_j\rangle$, $b_n^{(k)}=\langle\xi_n,g_k\rangle$) であり,

$$\Phi:=A(f_1,0)^*\cdots A(f_r,0)^*A(0,g_1)^*\cdots A(0,g_q)^*\Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}$$
$$=\sum_{n_1,\cdots,n_r,m_1,\cdots,m_q=1}^{\infty}a_{n_1}^{(1)}\cdots a_{n_r}^{(r)}b_{m_1}^{(1)}\cdots b_{m_q}^{(q)}A(e_{n_1},0)^*\cdots A(e_{n_r},0)^*$$
$$\times A(0,\xi_{m_1})^*\cdots A(0,\xi_{m_q})^*\Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}.$$

したがって, U の連続性により,

$$U\Phi=\sum_{n_1,\cdots,n_r,m_1,\cdots,m_q=1}^{\infty}a_{n_1}^{(1)}\cdots a_{n_r}^{(r)}b_{m_1}^{(1)}\cdots b_{m_q}^{(q)}UA(e_{n_1},0)^*\cdots A(e_{n_r},0)^*$$
$$\times A(0,\xi_{m_1})^*\cdots A(0,\xi_{m_q})^*\Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}$$
$$=\sum_{n_1,\cdots,n_r,m_1,\cdots,m_q=1}^{\infty}a_{n_1}^{(1)}\cdots a_{n_r}^{(r)}b_{m_1}^{(1)}\cdots b_{m_q}^{(q)}A_{\mathscr{H}}(e_{n_1})^*\cdots A_{\mathscr{H}}(e_{n_r})^*\Omega_{\mathscr{H}}$$
$$\otimes A_{\mathscr{K}}(\xi_{m_1})^*\cdots A_{\mathscr{K}}(\xi_{m_q})^*\Omega_{\mathscr{K}}$$
$$=A_{\mathscr{H}}(f_1)^*\cdots A_{\mathscr{H}}(f_r)^*\Omega_{\mathscr{H}}\otimes A_{\mathscr{K}}(g_1)^*\cdots A_{\mathscr{K}}(g_q)^*\Omega_{\mathscr{K}}.$$

ところで, 任意の $f\in\mathscr{H}$, $g\in\mathscr{K}$ に対して, 有限粒子空間上で $A(f,g)^*=A(f,0)^*+A(0,g)^*$ であるから, $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{H}\oplus\mathscr{K})$ は, 上の Φ の型のベクトルによって生成される. これらの事実から, (4.114) が得られる.

$$\Psi = A_{\mathscr{H}}(f_1)^* \cdots A_{\mathscr{H}}(f_r)^* \Omega_{\mathscr{H}} \otimes A_{\mathscr{K}}(g_1)^* \cdots A_{\mathscr{K}}(g_q)^* \Omega_{\mathscr{K}} \tag{4.116}$$

とすれば，

$$\begin{aligned}
&UA(f,g)^*U^{-1}\Psi \\
&= U[A(f,0)+A(0,g)]^* A(f_1,0)^* \cdots A(f_r,0)^* A(0,g_1)^* \cdots A(0,g_q)^* \Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}} \\
&= UA(f,0)^* A(f_1,0)^* \cdots A(f_r,0)^* A(0,g_1)^* \cdots A(0,g_q)^* \Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}} \\
&\quad + UA(0,g)^* A(f_1,0)^* \cdots A(f_r,0)^* A(0,g_1)^* \cdots A(0,g_q)^* \Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}} \\
&= A_{\mathscr{H}}(f)^* A_{\mathscr{H}}(f_1)^* \cdots A_{\mathscr{H}}(f_r)^* \Omega_{\mathscr{H}} \otimes A_{\mathscr{K}}(g_1)^* \cdots A_{\mathscr{K}}(g_q)^* \Omega_{\mathscr{K}} \\
&\quad + A_{\mathscr{H}}(f_1)^* \cdots A_{\mathscr{H}}(f_r)^* \Omega_{\mathscr{H}} \otimes A_{\mathscr{K}}(g)^* A_{\mathscr{K}}(g_1)^* \cdots A_{\mathscr{K}}(g_q)^* \Omega_{\mathscr{K}} \\
&= [A_{\mathscr{H}}(f)^* \otimes I + I \otimes A_{\mathscr{K}}(g)^*]\Psi.
\end{aligned}$$

したがって，(4.115) で $\sharp = *$ の場合が成り立つ．$UA(f,g)U^{-1}\Psi$ については，今得た式の共役を考察すればよい． □

定理 4-55 のユニタリ変換 U のもとで，第 2 量子化作用素がどのように対応するかを見よう．T, S をそれぞれ，$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素としよう．このとき，$T \oplus S$ は $\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$ 上の自己共役作用素である[21]．

定理 4-56　定理 4-55 のユニタリ変換 U に関して，作用素の等式

$$Ud\Gamma_{\mathrm{b}}(T \oplus S)U^{-1} = \overline{d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)} \tag{4.117}$$

が成り立つ．

証明　Ψ を (4.116) の型のベクトルとしよう．ただし，$f_j \in D(T)$, $g_k \in D(S)$ とする．これに対して，

$$\begin{aligned}
&U\, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T \oplus S)U^{-1}\Psi \\
&= U\, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T \oplus S) A(f_1,0)^* \cdots A(f_r,0)^* A(0,g_1)^* \cdots A(0,g_q)^* \Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}} \\
&= \sum_{j=1}^{r} UA(f_1,0)^* \cdots A(Tf_j,0)^* \cdots A(f_r,0)^* A(0,g_1)^* \cdots A(0,g_q)^* \Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{q} UA(f_1,0)^* \cdots A(f_r,0)^* A(0,g_1)^* \cdots A(0,Sg_k)^* \cdots A(0,g_q)^* \Omega_{\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}}
\end{aligned}$$

---

[21] $D(T \oplus S) := D(T) \oplus D(S)$, $(T \oplus S)(f,g) := (Tf, Sg)$, $(f,g) \in D(T) \oplus D(S)$．自己共役性の証明は，定理 3-7 (i) の場合と同様．

$$= \sum_{j=1}^{r} A_{\mathscr{H}}(f_1)^* \cdots A_{\mathscr{H}}(Tf_j)^* \cdots A_{\mathscr{H}}(f_r)^* \Omega_{\mathscr{H}} \otimes A_{\mathscr{K}}(g_1)^* \cdots A_{\mathscr{K}}(g_q)^* \Omega_{\mathscr{K}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{q} A_{\mathscr{H}}(f_1)^* \cdots A_{\mathscr{H}}(f_r)^* \Omega_{\mathscr{H}} \otimes A_{\mathscr{K}}(g_1)^* \cdots A_{\mathscr{K}}(Sg_k)^* \cdots A_{\mathscr{K}}(g_q)^* \Omega_{\mathscr{K}}$$

$$= [d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)]\Psi.$$

いま考えた型のベクトル Ψ の全体は，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T)) \hat{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(S))$ を生成するから，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T)) \hat{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(S))$ 上で (4.117) が成立する．部分空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の芯であるから (命題 4-13 (iii) で $p=1$ の場合)，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T)) \hat{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(S))$ は $\overline{d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)}$ の芯である．したがって，補題 2-32 の応用により，(4.117) を得る． □

4-8 節　CCR の表現

4-8-1　いくつかの定義

4-3 節において見たように，生成・消滅作用素 $A(\cdot)^\sharp$ は CCR という特徴的な交換関係にしたがう．そして，これらの作用素からボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のさまざまな作用素が構成されうる．特に，生成作用素と消滅作用素の単純な 1 次結合で定義される，Segal の場の作用素は特徴的な交換関係 (4.66) をみたす．代数的な観点からは，(4.66) はある代数の基本関係式をあたえるものと見ることができる．(4.66) と CCR (4.21a), (4.21b) は，(4.70a), (4.70b) を経由して，等価であることにも注意しよう．この意味で，(4.66) の型の交換関係も CCR とよぶ[22]．こうした考察により，ある普遍的な理念へと導かれる．

定義 4-57　$\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{F}$ の稠密な部分空間，$\mathscr{V}$ を $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間とする．各 $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\mathscr{F}$ 上の対称作用素 $\Phi(f)$ が対応し，次の性質をみたすとする：

(Φ.I)　任意の $f, g \in \mathscr{V}$ に対して，$\mathscr{D} \subset D(\Phi(f)\Phi(g))$.

(Φ.II)(実線形性)　任意の $f, g \in \mathscr{V}$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で，

$$\Phi(af + bg) = a\Phi(f) + b\Phi(g).$$

[22] 本来ならば，CCR (4.21a), (4.21b) と違う名称で呼んだ方がよいかもしれないが，交換子の中に入る対象の種類さえ明確に区別していれば，混乱は生じないはずである．

(Φ.III)　任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ と $f, g \in \mathscr{V}$ に対して，

$$[\Phi(f), \Phi(g)]\Psi = i\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle\Psi.$$

このとき，$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{\Phi(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ を $\mathscr{V}$ によって**添字づけられた，第 1 種の CCR の表現** (representation) という．この場合，$(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ をその**表現空間**という．表現空間が文脈より明らかな場合は，$\{\Phi(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ を単に第 1 種の CCR の表現という．

なお，上の定義の条件 (Φ.I) を次の条件 (Φ.I)' で置き換える場合もある：

(Φ.I)'　任意の $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\mathscr{D} \subset D(\Phi(f))$ かつ $\Phi(f)\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$.

この場合には，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $f_j \in \mathscr{V}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，$\mathscr{D}$ は $\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)$ の定義域に含まれ，作用素の集合 $\{\Phi(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}$ は，$\mathscr{D}$ 上への作用により，1 つの代数を生成する．この代数を**ハイゼンベルク型 CCR 代数**の表現という．

例 4-4　$\Phi_{\mathrm{S}}(\cdot)$ をボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の Segal の場の作用素とすれば，

$$\{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}),\ \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V}),\ \{\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)} \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$$

は $\mathscr{V}$ によって添字づけられた，CCR の表現である．これを第 1 種の CCR の**フォック表現** (Fock representation) という．

J をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の**共役子** (conjugation) としよう．すなわち，J は次の性質をみたす $\mathscr{H}$ から $\mathscr{H}$ への写像である：

(J.1)(反線形性)　すべての $f, g \in \mathscr{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$J(\alpha f + \beta g) = \alpha^* J(f) + \beta^* J(g)$.

(J.2)(等長性)　$\|Jf\| = \|f\|$, $f \in \mathscr{H}$.

(J.3)　$J^2 = I$.

このとき，$\mathscr{H}_J := \{f \in \mathscr{H} \,|\, Jf = f\}$ は実ヒルベルト空間になる．さらに，任意の $f \in \mathscr{H}$ に対して，$f_1, f_2 \in \mathscr{H}_J$ がただ 1 つ存在して，$f = f_1 + if_2$ と表される[23)].

$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{\Phi(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ を $\mathscr{V}$ によって添字づけられた，第 1 種の CCR の表現とし，$\mathscr{V}_J := \{f \in \mathscr{V} \,|\, Jf = f\}$,

$$\phi(f) := \Phi(f), \quad \pi(f) := \Phi(if), \quad f \in \mathscr{V}_J,$$

とおく．このとき，次が成立する．

[23)] 新井-江沢 (1999b) の p.459.

(i) すべての $f, g \in \mathscr{V}_J$ に対して，$\mathscr{D} \subset D(\phi(f)\phi(g)) \cap D(\pi(f)\pi(g)) \cap D(\phi(f)\pi(g)) \cap D(\pi(f)\phi(g))$.

(ii) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ と $f, g \in \mathscr{V}_J$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で

$$\phi(af + bg) = a\phi(f) + b\phi(g), \quad \pi(af + bg) = a\pi(f) + b\pi(g).$$

(iii) 任意の $f, g \in \mathscr{V}_J$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で，CCR

$$[\phi(f), \pi(g)] = i\langle f, g\rangle, \quad [\phi(f), \phi(g)] = 0, \quad [\pi(f), \pi(g)] = 0,$$

がみたされる．

このような性質をもつ組 $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{\phi(f), \pi(f)\}_{f\in\mathscr{V}_J}\}$ を**実ベクトル空間** $\mathscr{V}_J$ **によって添字づけられた CCR の表現**という．

逆に，実ベクトル空間 $\mathscr{W}$ によって添字づけられた CCR の表現があたえられたとき，$\mathscr{W}$ の複素化 $\mathscr{W}_{\mathrm{C}}$ によって添字づけられた第 1 種の CCR の表現をつくることができる[24]．

さらに，次の点も注目に値する．$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{\Phi(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\}$ を $\mathscr{V}$ によって添字づけられた，第 1 種の CCR の表現とするとき，(4.70a) にならって，

$$C(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Phi(f) + i\Phi(if)\}, \quad f \in \mathscr{V},$$

を定義すれば，次が成り立つ．

(C.1) 任意の $f, g \in \mathscr{V}$ に対して $\mathscr{D} \subset D(C(f)C(g)) \cap D(C(f)^*C(g)^*) \cap D(C(f)C(g)^*) \cap D(C(f)^*C(g))$.

(C.2)(反線形性) 任意の $f, g \in \mathscr{V}$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で，

$$C(\alpha f + \beta g) = \alpha^* C(f) + \beta^* C(g).$$

(C.3)(CCR) 任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ と $f, g \in \mathscr{V}$ に対して，

$$[C(f), C(g)^*]\Psi = \langle f, g\rangle\Psi,$$

$$[C(f), C(g)]\Psi = 0, \quad [C(f)^*, C(g)^*]\Psi = 0.$$

そこで，あらためて次の定義を設ける．

定義 4-58 $\mathscr{F}, \mathscr{H}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{F}$ の稠密な部分空間，$\mathscr{V}$ を $\mathscr{H}$ の稠密

---

[24] 新井-江沢 (1999b) の 4 章，4.4 節，p.460 の注意 (ii) を参照．

な部分空間とする．各 $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\mathscr{F}$ 上の稠密に定義された線形作用素 $C(f)$ が対応し，上の (C.1)〜(C.3) をみたすとき，$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{C(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ を $\mathscr{V}$ **によって添字づけられた，第 2 種の CCR の表現**という．表現空間 $(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ が文脈より明らかな場合は，$\{C(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ を単に第 2 種の CCR の表現という．

$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{C(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ を $\mathscr{V}$ によって添字づけられた，第 2 種の CCR の表現とするとき，

$$\Phi_C(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\{C(f) + C(f)^*\} \tag{4.118}$$

を定義する．これを**第 2 種の CCR の表現** $\{C(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}$ **に同伴する場の作用素**という．容易にわかるように，$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{\Phi_C(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ は $\mathscr{V}$ によって添字づけられた，第 1 種の CCR の表現となる．

以上から，CCR の表現に関しては，第 2 種の CCR の表現を考察すれば十分であることがわかる．

例 4-5　$A(\cdot)$ をボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の消滅作用素とすれば，

$$\pi_{\mathrm{F}}(\mathscr{V}) := \{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}),\ \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V}),\ \{A(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$$

は $\mathscr{V}$ によって添字づけられた，第 2 種の CCR の表現である．これを第 2 種の CCR の**フォック表現**という．

以下，特に断らない限り，第 2 種の CCR の表現だけを考察し，これを単に CCR の表現とよぶことにする．

定義 4-59　$\mathscr{V}$ によって添字づけられた，CCR の 2 つの表現 $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{C(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$, $\{\mathscr{F}', \mathscr{D}', \{C'(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ が同値であるとは，ユニタリ変換 $U : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'$ が存在して，すべての $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\overline{C'(f)} = U\overline{C(f)}U^{-1}$ が成り立つ場合をいう．

フォック表現に同値でない，CCR の表現は，しばしば，**非同値表現** (inequivalent representation) とよばれる．

定義 4-60　$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{C(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ を CCR の表現とする．次の性質をみたすベクトル $\Omega \in \mathscr{F}$ が存在するとき，これをこの表現における**真空**という：

(i)　任意の $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\Omega \in D(C(f))$ であり，$C(f)\Omega = 0$ が成り立つ．

(ii)　任意の $n \in \mathbb{N}$ と $f, f_j \in \mathscr{V}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，

$$\Omega \in D(C(f_1)^* \cdots C(f_n)^*) \quad \text{かつ}$$

$$C(f_1)^* \cdots C(f_n)^* \Omega \in D(C(f)) \cap D(C(f)^*).$$

このとき，**真空から生成される部分空間**

$$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}} := \mathscr{L}\{\Omega, C(f_1)^* \cdots C(f_n)^* \Omega \,|\, n \in \mathbb{N},\ f_j \in \mathscr{V},\ j = 1, \cdots, n\}$$

が定義される．

注意 4-10 任意の $\Phi \in \mathscr{D}$ と $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$, $f, g \in \mathscr{V}$ に対して，

$$\langle [C(f)^\sharp, C(g)^\sharp]\Phi, \Psi\rangle = \langle \Phi, [(C(g)^\sharp)^*, (C(f)^\sharp)^*]\Psi\rangle$$

であるから，$\{C(f), C(f)^* \,|\, f \in \mathscr{V}\}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ 上でも CCR をみたすことになる．

次の命題は，あたえられた CCR の表現がフォック表現に同値であるための十分条件を記述する．

命題 4-61 $\pi_{\mathscr{V}} := \{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{C(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}\}$ を CCR の表現とし，真空 Ω をもつとし，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ は $\mathscr{F}$ で稠密であるとする．さらに，任意の $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ は $C(f)^*$ の芯であるとする．このとき，$\pi_{\mathscr{V}}$ はフォック表現 $\pi_{\mathrm{F}}(\mathscr{V})$ にユニタリ同値である．

証明 写像 $U : \mathscr{F}_{\mathrm{fin}} \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V})$ を

$$U\Omega := \Omega_{\mathscr{H}},$$

$$UC(f_1)^* \cdots C(f_n)^* \Omega := A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}$$

$(f_j \in \mathscr{V},\ j = 1, \cdots, n)$ によって定義する．$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ の任意の元には線形性によって拡張する (この定義が意味をもつことを確かめよ)．上の注意 4-10 により，U は等長作用素であり，$\mathrm{Ran}\,(U) = \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V})$．仮定により，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ は $\mathscr{F}$ で稠密であるから，拡大定理により，U は $\mathscr{F}$ から $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ へのユニタリ作用素に一意的に拡張される．この拡大も U で表す．容易にわかるように，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V})$ と $f \in \mathscr{V}$ に対して，

$$UC(f)^* U^{-1} \Psi = A(f)^* \Psi. \qquad (*)$$

$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V})$ は $A(f)^*$ の芯であるから，近似議論により，$(*)$ は $A(f)^* \subset UC(f)^* U^{-1}$ を意味する．$A(f)^*$ と $C(f)^*$ の役割を交換して考えると，同様にして，$C(f)^* \subset U^{-1} A(f)^* U$，すなわち，$UC(f)^* U^{-1} \subset A(f)^*$ を得る．したがって，作用素の等式 $UC(f)^* U^{-1} = A(f)^*$ を得る．ゆえに，$UC(f)U^{-1} = A(f)$ でもある． □

4-8-2　CCR の表現に同伴する第 2 量子化作用素

$\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$ をヒルベルト空間, $\mathscr{D}$, $\mathscr{V}$ を, それぞれ, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$ で稠密な部分空間, $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{C(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\}$ を CCR の表現とする.

T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素とし, $T = U_T|T|$ を T の標準極分解とする. すなわち, U_T は部分等長作用素で $\mathrm{Ran}\,(U_T) = \overline{\mathrm{Ran}\,(T)}$, $\ker U_T = \ker T$ をみたすものである[25). $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(|T|^{1/2})$ を $\mathscr{H}$ の CONS で,

$$U_T|T|^{1/2}e_n, |T|^{1/2}e_n \in \mathscr{V}, \quad n \in \mathbb{N},$$

をみたすものとする. もし, $\mathscr{F}$ 上の線形作用素 $H^{(C)}(T)$ が存在して, $\mathscr{D} \subset D(H^{(C)}(T))$ かつ任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$ に対して

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} C(U_T|T|^{1/2}e_n)^* C(|T|^{1/2}e_n)\Psi \right\rangle = \langle \Phi, H^{(C)}(T)\Psi \rangle \qquad (4.119)$$

が成立するならば, CCR の表現 $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{C(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\}$ は T に関して第 2 量子化作用素をもつといい, $H^{(C)}(T)$ を $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{C(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\}$ と T に**同伴する (1 つの) 第 2 量子化作用素**とよぶ. この定義では, $H^{(C)}(T)$ は CONS の選び方に依ってもよいとする.

例 4-6　T, e_n を上のものとする. このとき, 命題 4-29 (ii) により, フォック表現 $\pi_{\mathrm{F}}(\mathscr{V})$ は, T に関して第 2 量子化作用素をもち, その同伴する第 2 量子化作用素は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ である.

命題 4-62　T を $\mathscr{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素, $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, \{C(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\}$ は T に関して第 2 量子化作用素をもつ, CCR の表現であるとし, $H^{(C)}(T)$ をその 1 つの第 2 量子化作用素とする. さらに, 次の付加的な条件がみたされているとする：

(i)　$f_n, f \in D(|T|^{1/2})$, $\|f_n - f\|_{\mathscr{H}} \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$, $U_T|T|^{1/2}f_n, U_T|T|^{1/2}f \in \mathscr{V}$ ならば, 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$ に対して, $\lim_{n\to\infty}\langle \Phi, C(U_T|T|^{1/2}f_n)\Psi \rangle = \langle \Phi, C(U_T|T|^{1/2}f)\Psi \rangle$.

(ii)　各 $f \in \mathscr{V}$ に対して, $\mathscr{D}$ は $C^\sharp(f)$ の芯である.

このとき, $Tf \in \mathscr{V}$ となる任意の $f \in D(T)$ に対して, $\mathscr{D} \subset D(C(f)^\sharp H^{(C)}(T))$ であり, $\mathscr{D}$ 上で交換関係

$$[H^{(C)}(T), C(f)^*] = C(Tf)^*, \qquad (4.120\mathrm{a})$$

---

25) 新井-江沢 (1999a) の p.177, 定理 2.58 を参照. この定理の証明の方法は, A が稠密に定義された, 非有界な閉作用素に対しても定義域の問題に注意すれば, そのまま通用する.

$$[H^{(C)}(T), C(f)] = -C(Tf) \tag{4.120b}$$

が成立する．

証明　$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{V}$ を (4.119) をみたす，$\mathscr{H}$ の CONS とする．任意の $f \in D(T)$, $\Phi, \Psi \in \mathscr{D}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi, H^{(C)}(T)C(f)^*\Psi\rangle - \langle C(f)\Phi, H^{(C)}(T)\Psi\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Phi, C(U_T|T|^{1/2}e_n)^*[C(|T|^{1/2}e_n), C(f)^*]\Psi\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \langle \Phi, C(U|T|^{1/2}u_N)^*\Psi\rangle.
\end{aligned}$$

ただし，$u_N := \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, |T|^{1/2}f\rangle e_n \longrightarrow |T|^{1/2}f$ $(N \longrightarrow \infty)$．したがって，仮定 (i) により，

$$\langle \Phi, H^{(C)}(T)C(f)^*\Psi\rangle - \langle C(f)\Phi, H^{(C)}(T)\Psi\rangle = \langle \Phi, C(Tf)^*\Psi\rangle$$

が得られる．条件 (ii) により，この等式はすべての $\Phi \in D(C(f))$ に対して拡張できる．したがって，$H^{(C)}(T)\Psi \in D(C(f)^*)$ であり，(4.120a) が得られる． (4.120b) は (4.120a) の共役関係を考察すれば容易に証明される． □

4-8-3　ボゴリューボフ変換

CCR の表現の一般的なクラスを 1 つ示しておく．$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{V}$ を $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間とする．

J を $\mathscr{H}$ 上の共役子とする．S, T を $\mathscr{H}$ 上の有界線形作用素で

$$S^*S - T^*T = I, \quad S^*JTJ - T^*JSJ = 0, \tag{4.121}$$

をみたすものとする．L を $\mathscr{V}$ 上の線形汎関数とする (i.e., L は $\mathscr{V}$ から $\mathbb{C}$ への線形写像)．各 $f \in \mathscr{V}$ に対して，$A(f)$ を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の消滅作用素として，

$$B(f) := A(Sf) + A(JTf)^* + L(f)^* \tag{4.122}$$

とおく．このとき，$\{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}), \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V}), \{B(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\}$ が，$\mathscr{V}$ によって添字づけられた，CCR の表現であることは容易に確かめられる．

(4.122) は $\mathscr{V}$ 上の作用素値汎関数 $A(\cdot)^\sharp$ の変換 $(A(\cdot), A(\cdot)^*) \longrightarrow (B(\cdot), B(\cdot)^*)$ と見ることができる．これをボゴリューボフ (**Bogoliubov**) 変換という．

ボゴリューボフ変換から決まる，CCR の表現 $\{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}), \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V}), \{B(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\}$ がフォック表現 $\pi_{\mathrm{F}}(\mathscr{V})$ とユニタリ同値になるとき，ボゴリューボフ変換はは**正則** (proper) であるという．

ここでは，非自明なボゴリューボフ変換のうちでもっとも簡単なもの，すなわち，$S = I, T = 0$ の場合についてのみ議論する[26]．そこで，

$$B_L(f) := A(f) + L(f)^*, \quad f \in \mathscr{V}, \tag{4.123}$$

とおく．

定理 4-63　ボゴリューボフ変換 $(A(\cdot), A(\cdot)^*) \longrightarrow (B_L(\cdot), B_L(\cdot)^*)$ が正則であるための必要十分条件は，ある $h \in \mathscr{H}$ が存在して，$L(f) = \langle h, f\rangle_{\mathscr{H}}$ $(f \in \mathscr{H})$ と表されることである．

証明　(必要性) ボゴリューボフ変換 $(A(\cdot), A(\cdot)^*) \longrightarrow (B_L(\cdot), B_L(\cdot)^*)$ が正則であるとする．すなわち，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U があって，$B_L(f) = UA(f)U^{-1}$ $(f \in \mathscr{V})$ と書けるとする．$\Omega := U\Omega_{\mathscr{H}}$ とおけば，$B_L(f)\Omega = 0$．したがって，$A(f)\Omega = -L(f)^*\Omega$．$\Omega \neq 0$ であるから，$\Omega^{(n)} \neq 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ がある．$c_n := 1/\|\Omega^{(n)}\|^2$ とおけば，$L(f)^* = -c_n\langle A(f)^*\Omega^{(n)}, \Omega\rangle$．ゆえに，

$$\begin{aligned}|L(f)| &\leq c_n\|A(f)^*\Omega^{(n)}\| \leq c_n\|f\|\|(N_{\mathrm{b}}+1)^{1/2}\Omega^{(n)}\| \\ &= \sqrt{c_n(n+1)}\|f\|.\end{aligned}$$

これは，L が有界であることを示す．$\mathscr{V}$ は稠密であるので，拡大定理により，$\mathscr{H}$ 上の有界線形汎関数 $\tilde{L}$ で，$\tilde{L}(f) = L(f), f \in \mathscr{V}$ となるものがただ 1 つ存在する．すると，リースの表現定理により，$h \in \mathscr{H}$ があって，$\tilde{L}(f) = \langle h, f\rangle$ $(f \in \mathscr{H})$ と表される．特に，$L(f) = \langle h, f\rangle$ $(f \in \mathscr{V})$ である．

(十分性) ある $h \in \mathscr{H}$ が存在して，$L(f) = \langle h, f\rangle$ $(f \in \mathscr{V})$ と表されるとしよう．このとき，系 4-41 によって，作用素の等式

$$e^{i\sqrt{2}\,\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(ih)}}A(f)e^{-i\sqrt{2}\,\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(ih)}} = B_L(f)$$

が成立するから，$\{A(f), A(f)^*\}_{f\in\mathscr{V}}$ と $\{B_L(f), B_L(f)^*\}_{f\in\mathscr{V}}$ はユニタリ同値である．ゆえに，ボゴリューボフ変換 $(A(\cdot), A(\cdot)^*) \longrightarrow (B_L(\cdot), B_L(\cdot)^*)$ は正則である．　□

例 4-7　S を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．$g \in D(S)$ を任意に 1 つ固定し，

---

[26] 一般のボゴリューボフ変換が正則になるための必要十分条件については，Berezin (1966)，Ruijsenaars (1977, 1978)，Reed and Simon (1979) の p.316，定理 XI.108 等を参照.

$$S_g(f) := \langle Sg, Sf\rangle, \quad f \in D(S),$$

とおく．これは $D(S)$ 上の線形汎関数である．$\mathscr{V}$ は，$D(S)$ に含まれる稠密な部分空間で S の芯であるとする．このとき，$\{B_{S_g}(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ ($L = S_g$ の場合) は CCR の表現である．これがフォック表現に同値となる条件を求めよう．

$g \in D(S^2)$ とすれば，$S_g(f) = \langle S^2 g, f\rangle$ $(f \in \mathscr{V})$．したがって，定理 4-63 によって，$\{B_{S_g}(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ はフォック表現に同値である．

逆に，$\{B_{S_g}(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ はフォック表現に同値であるとすれば，定理 4-63 により，$h \in \mathscr{H}$ が存在して，$S_g(f) = \langle h, f\rangle$ $(f \in \mathscr{V})$ と表される．すなわち，$\langle h, f\rangle = \langle Sh, Sf\rangle$ $(f \in \mathscr{V})$．$\mathscr{V}$ は S の芯であるから，この等式は，$Sg \in D(S)$ かつ $S^2 g = h$ を意味する．ゆえに，$g \in D(S^2)$ である．

以上から，

$\{B_{S_g}(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ がフォック表現に同値になるための必要十分条件は，$g \in D(S^2)$ となること

が示されたことになる．したがって，この言明の対偶を考えることにより，$\{B_{S_g}(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ **がフォック表現に非同値になるための必要十分条件は，$g \notin D(S^2)$ となること**がわかる．

ここで，念のために注意しておくと，$\{B_{S_g}(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ がフォック表現に非同値であるためには，$D(S^2) \neq \mathscr{H}$ であることが必要であり，したがって，S は非有界でなければならない，ということである．

例 4-8 T を $\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素で，単射であるとする．$g \in D(T^{-1/2})$ を任意に 1 つ固定し，

$$L_g(f) := \langle T^{-1/2} g, T^{-1/2} f\rangle, \quad f \in D(T^{-1/2}),$$

とおく．$\mathscr{V}$ は，$D(T^{-1/2})$ に含まれる稠密な部分空間で $T^{-1/2}$ の芯であるとする．これは，例 4-7 で，$S = T^{-1/2}$ の場合である．したがって，

$\{B_{L_g}(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ がフォック表現に同値になるための必要十分条件は，$g \in D(T^{-1})$ となること

である．言い換えれば，$\{B_{L_g}(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ **がフォック表現に非同値になるための必要十分条件は，$g \notin D(T^{-1})$ となること**である．

例 4-9 T を $\mathscr{H}$ 上の非有界な自己共役作用素で真に正 (i.e., $\inf \sigma(T) > 0$) である

とする (したがって，T^{-1} は有界な正の自己共役作用素である)．各 $n \in \mathbb{Z}$ と任意の $f, g \in D(T^n)$ とに対して，

$$\langle f, g \rangle_n := \langle T^n f, T^n g \rangle$$

とおけば，これは $D(T^n)$ の内積になる ($n \leq 0$ のとき，$D(T^n) = \mathscr{H}$)．ベクトル空間としての $D(T^n)$ に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ を付与してできる内積空間を，$n \geq 0$ の場合，$\mathscr{H}_n(T)$ と記し，$n < 0$ の場合，$\mathscr{H}_{n,0}$ とする．$\mathscr{H}_0(T) = \mathscr{H}$ である．

$n > 0$ ならば $\mathscr{H}_n(T)$ は完備である．だが，$\mathscr{H}_{-n,0}(T)$ $(n > 0)$ は完備でない．これは次のようにしてわかる．T^n の非有界性により，$D(T^n) \neq \mathscr{H}$ であるから，$v \in \mathscr{H} \setminus D(T^n)$ が存在する．$v_k := \chi_{[0,k]}(T)v$ とおく．ただし，$\chi_{[0,k]}$ は閉区間 $[0,k]$ の定義関数である．このとき，$v_k \in D(T^n)$ であり，$\mathscr{H}$ の位相で，$v_k \longrightarrow v$ $(k \longrightarrow \infty)$．したがって，$f_k := T^n v_k$ とおけば，$\{f_k\}_k$ は $\mathscr{H}_{-n,0}(T)$ のコーシー列である．もし，$\|f_k - f\|_{-n} \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$ となる $f \in \mathscr{H}_{-n,0}(T)$ があったとすれば，$T^{-n} f = v$ でなければならない．だが，これは $v \in D(T^n)$ を意味するので矛盾である．

そこで，$\mathscr{H}_{-n,0}(T)$ の完備化を $\mathscr{H}_{-n}(T)$ とする．$\mathscr{H}_0(T) := \mathscr{H}$ とおく．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathscr{H}_{-n}(T)$ のコーシー列は $\mathscr{H}_{-n-1}(T)$ のコーシー列である．この意味で $\mathscr{H}_{-n}(T) \subset \mathscr{H}_{-n-1}(T)$ と書く．こうして，ヒルベルト空間の列 $\{\mathscr{H}_n(T)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ で

$$\cdots \subset \mathscr{H}_{n+1}(T) \subset \mathscr{H}_n(T) \subset \cdots \subset \mathscr{H}_1(T)$$

$$\subset \mathscr{H}_0(T) \subset \mathscr{H}_{-1}(T) \subset \cdots \subset \mathscr{H}_{-n}(T) \subset \mathscr{H}_{-n-1}(T) \subset \cdots$$

をみたすものが構成される．これを**自己共役作用素 T に同伴するヒルベルト空間のスケール**という．

いま，$v \in \mathscr{H}_{-n}(T)$ $(v \notin \mathscr{H})$ とする．$\mathscr{H}$ は $\mathscr{H}_{-n}(T)$ で稠密であるから $\|v_k - v\|_{-n} \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$ となる $v_k \in \mathscr{H}$ が存在する．さらに，$u := \lim_{k \to \infty} T^{-n} v_k$ ($\mathscr{H}$ の位相での収束) も存在する．この場合，$u \notin D(T^n)$ となっている (もし，$u \in D(T^n)$ であるとすれば，$u = T^{-n}(T^n u)$ と表されるので，$v = T^n u \in \mathscr{H}$．$v \in \mathscr{H}$ が導かれて，v のとりかたに反する)．$\mathscr{V}$ を $D(T^n)$ に含まれる稠密な部分空間で T^n の芯であるとする．$f \in \mathscr{V}$ に対して，

$$T_v(f) := \langle u, T^n f \rangle$$

を定義する．このとき，T_v は $\mathscr{V}$ 上の線形汎関数であるが，$\mathscr{H}$ の位相で連続ではない．したがって，定理 4-63 によって，CCR の表現 $\{B_{T_v}(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}$ はフォック表現にユニタリ同値でない．

命題 4-64 T を $\mathscr{H}$ 上の単射な非負自己共役作用素とし，$\mathscr{V} \subset D(T^{-1/2}) \cap D(T)$ とする．$v \in D(T^{1/2})$ とし，$L(f) = \langle v, T^{-1/2} f\rangle$ の場合のボゴリューボフ変換 B_L (4.123) を考える．この場合の B_L を $B^{(v)}$ と記す：

$$B^{(v)}(f) := A(f) + \langle T^{-1/2} f, v\rangle, \quad f \in \mathscr{V}.$$

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$ を $\mathscr{H}$ の CONS で，$T^{1/2} e_n \in \mathscr{V}$ $(n \in \mathbb{N})$ をみたすものとする．このとき，任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} B^{(v)}(T^{1/2}e_n)^* B^{(v)}(T^{1/2}e_n)\Psi \right\rangle$$
$$= \langle \Phi, \{d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + A(T^{1/2}v)^* + A(T^{1/2}v) + \|v\|^2\}\Psi\rangle \qquad (4.124)$$

が成り立つ．したがって，CCR の表現 $\{B^{(v)}(f) \,|\, f \in \mathscr{V}\}$ に同伴する第 2 量子化作用素は，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V})$ 上で

$$H^{(B^{(v)})}(T) = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + A(T^{1/2}v)^* + A(T^{1/2}v) + \|v\|^2$$

という形をもつ．

証明 任意の $\Phi, \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ に対して，

$$\left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} B^{(v)}(T^{1/2}e_n)^* B^{(v)}(T^{1/2}e_n)\Psi \right\rangle$$
$$= \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} A(T^{1/2}e_n)^* A(T^{1/2}e_n)\Psi \right\rangle + \left\langle \Phi, A\left(\sum_{n=1}^{N} \langle e_n, v\rangle T^{1/2} e_n\right)^* \Psi \right\rangle$$
$$+ \left\langle \Phi, A\left(\left(\sum_{n=1}^{N} \langle e_n, v\rangle T^{1/2} e_n\right)\right)\Psi \right\rangle + \sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n\rangle|^2 \langle \Phi, \Psi\rangle. \qquad (4.125)$$

命題 4-29 (ii) によって，右辺第 1 項は，$N \longrightarrow \infty$ のとき，$\langle \Phi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\rangle$ に収束する．右辺第 2 項の収束を見るために[27)]，Φ として，$\Phi = A(f_1)^* \cdots A(f_m)^* \Omega_{\mathscr{H}}$ $(f_j \in D(T)$ $(j = 1, \cdots, n))$ をとると，

$$A\left(\sum_{n=1}^{N} \langle e_n, v\rangle T^{1/2} e_n\right)\Phi$$

[27)] $v_N := \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, v\rangle e_n \longrightarrow v$ $(N \longrightarrow \infty)$ であるが，$T^{1/2}$ が非有界の場合には，$T^{1/2} v_N \longrightarrow T^{1/2} v$ $(T^{1/2} v_N = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, v\rangle T^{1/2} e_n)$ とは限らないので，ここでは，$A(f)^*\Psi$ の f に関する連続性を適用できないことに注意．

$$= \sum_{j=1}^{m} \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, v \rangle e_n, T^{1/2} f_j \right\rangle A(f_1)^* \cdots \widehat{A(f_j)^*} \cdots A(f_m)^* \Omega_{\mathscr{H}}$$

$$\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{m} \langle v, T^{1/2} f_j \rangle A(f_1)^* \cdots \widehat{A(f_j)^*} \cdots A(f_m)^* \Omega_{\mathscr{H}}$$

$$= A(T^{1/2} v)\Phi.$$

したがって，(4.125) の右辺第 2 項は，$N \longrightarrow \infty$ のとき，$\langle A(T^{1/2}v)\Phi, \Psi\rangle = \langle \Phi, A(T^{1/2}v)^*\Psi\rangle$ に収束する．同様に，(4.125) の右辺第 3 項は，$N \longrightarrow \infty$ のとき，$\langle \Phi, A(T^{1/2}v)\Psi\rangle$ に収束する．右辺第 4 項は，パーセヴァルの等式により，$N \longrightarrow \infty$ のとき，$\|v\|^2\langle \Phi, \Psi\rangle$ に収束する．よって，(4.124) が導かれる． □

ノート

この章では，ボソンフォック空間とそこで働く基本的な線形作用素について，一般的で基礎的な側面を論じた．ボソンフォック空間を数学的理念界の中にいかに位置づけるかを考察する上で 1 つの鍵となるのが CCR の表現の観点である．つまり，ボソンフォック空間とは，CCR の 1 つの表現 — フォック表現 — を実現するヒルベルト空間と見ることができる (4-8 節を参照)．フォック表現から別の CCR の表現 (4-8-3 項を参照) や他の種類の無限次元代数の表現を構成することが可能である (たとえば，Arai (1991b, 1997c), Ottesen (1995))．こうして，ボソンフォック空間は，いろいろな無限次元代数の表現空間としての可能性をもち，無限次元的な代数的理念と解析的理念が合流する舞台をの 1 つを提供する．

CCR の表現に関しては，本章で述べたのとは別の型の表現も存在する．量子力学で学ぶように，有限自由度の CCR (0.26) の表現の変形として，Weyl 型の CCR の表現とよばれるものが定義される (江沢 (1978b) の pp.319∼328，新井 (1997a) の p.196)．無限自由度の CCR の表現の場合にもこれに対応するものが定義されるのである．

$\mathscr{V}$ を実ベクトル空間とし，σ を $\mathscr{V}$ 上の**シンプレクティック形式** (symplectic form) としよう．すなわち，σ は $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ から $\mathbb{R}$ への双線形形式で次の 2 つの性質をもつものである：(i)(反対称性) すべての $f, g \in \mathscr{V}$ に対して，$\sigma(f,g) = -\sigma(g,f)$，(ii) (非退化性) すべての $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\sigma(f,g) = 0$ ならば $g = 0$ である[28)]．

ヒルベルト空間 $\mathscr{F}$ と $\mathscr{F}$ 上のユニタリ作用素の族 $\{W(f) \mid f \in \mathscr{V}\}$ が存在して，

(W.1)(**Weyl 関係式**)　すべての $f, g \in \mathscr{V}$ に対して，

$$W(f)W(g) = e^{\frac{\sigma(f,g)}{2i}} W(f+g),$$

[28)] 基本的な例は，$\mathscr{V}$ が複素内積空間であるとき，$\sigma(f,g) = \mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle_{\mathscr{V}}$ である (係数体を $\mathbb{R}$ に制限することにより，$\mathscr{V}$ は実ベクトル空間になる)．

(W.2)(連続性)　各 $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\{W(tf)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は強連続 1 パラメータユニタリ群をなす，

がみたされるとき，$\{\mathscr{F}, \{W(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\}$ を $\mathscr{V}$ によって添字づけられた，**CCR の Weyl 型表現**という．

ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の Segal の場の作用素 $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ から，ユニタリ作用素

$$W_{\mathrm{S}}(f) := e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}, \quad f \in \mathscr{H},$$

をつくれば，定理 4-36 (ii) によって，$\mathscr{H}$ の任意の稠密な部分空間 $\mathscr{V}$ に対して，$\sigma(f,g) = \mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle_{\mathscr{H}}$ として，$\{W_{\mathrm{S}}(f) \mid f \in \mathscr{V}\}$ は CCR の Weyl 型表現の 1 つの例をあたえる．これを **CCR の Weyl 型フォック表現**という．

有限自由度の場合とは異なり，無限自由度の CCR の Weyl 型表現については，表現の一意性は成立しない．すなわち，フォック表現にユニタリ同値でない Weyl 型表現が無数に存在する (問題 16 を参照)．CCR の Weyl 型表現の詳しい論述については，たとえば，江沢 (1978b) の pp.463〜pp.467, Reed and Simon (1975) の Appendix X.7, Bratteli and Robinson (1997) の pp.18〜23 を，また，最近の研究については，Proksch, Reents, and Summers (1995), Robinson (1999) 等を参照．

ボソンフォック空間の重要な特質の 1 つとして，それを確率論的に記述できるということがある．$\mathscr{H}$ を可分な実ヒルベルト空間としよう．このとき，次の性質をみたす確率空間 $(Q_{\mathscr{H}}, \Sigma_{\mathscr{H}}, \mu_{\mathscr{H}})$ — $Q_{\mathscr{H}}$ は空でない集合, $\Sigma_{\mathscr{H}}$ は $Q_{\mathscr{H}}$ の部分集合からなる (1 つの) ボレル集合体，$\mu_{\mathscr{H}}$ は，$\mu_{\mathscr{H}}(Q_{\mathscr{H}}) = 1$ となる可測空間 $(Q_{\mathscr{H}}, \Sigma_{\mathscr{H}})$ 上の測度 — と $Q_{\mathscr{H}}$ 上の確率変数の族 $\{\phi_{\mathscr{H}}(f) \mid f \in \mathscr{H}\}$ が存在する：

(a)　$\Sigma_{\mathscr{H}}$ は $\{\phi_{\mathscr{H}} \mid f \in \mathscr{H}\}$ によって生成される．

(b)(線形性)　各 $f, g \in \mathscr{H}$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\phi_{\mathscr{H}}(af+bg) = a\phi_{\mathscr{H}}(f) + b\phi_{\mathscr{H}}(g),\ \mu_{\mathscr{H}}\text{-a.e.}.$$

(c)(ガウス型確率変数)　$\displaystyle\int_{Q_{\mathscr{H}}} e^{i\phi_{\mathscr{H}}(f)}d\mu_{\mathscr{H}} = e^{-\|f\|^2/4}\ (f \in \mathscr{H}).$

対応 $f \longrightarrow \phi_{\mathscr{H}}(f)$ を $\mathscr{H}$ 上の**ガウス確率超過程**という[29]．

次の事実が証明される：$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ を $\mathscr{H}$ の複素化とする．このとき，ユニタリ変換 $U : \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_{\mathrm{c}}) \longrightarrow L^2(Q_{\mathscr{H}}, d\mu_{\mathscr{H}})$ で

$$U\Omega_{\mathscr{H}} = 1,$$

$$U\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}U^{-1} = \phi_{\mathscr{H}}(f) \quad (\text{作用素の等式}), \quad f \in \mathscr{H},$$

をみたすものがただ 1 つ存在する (右辺の $\phi_{\mathscr{H}}(f)$ は関数 $\phi_{\mathscr{H}}(f)$ によるかけ算作用素を表す)[30]．

[29] 江沢-新井 (1988) を参照.

[30] 証明については，江沢-新井 (1988) を参照.

各 $f \in \mathscr{H}$ に対して，$\pi_{\mathscr{H}}(f) := U\Pi_{\mathrm{S}}(f)U^{-1}$ とおけば，

$$\rho_Q := \{L^2(Q_{\mathscr{H}}, d\mu_{\mathscr{H}}), U\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}_{\mathrm{c}}), \{\phi_{\mathscr{H}}(f), \pi_{\mathscr{H}}(f)\}_{f\in\mathscr{H}}\}$$

は実ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ によって添字づけられた CCR の表現であり，フォック表現と同値である．この表現に特徴的なことは，$\phi_{\mathscr{H}}(f)$ がかけ算作用素になっていることである．これが，実は，序章で述べた場のシュレーディンガー表現の (抽象的形態における) 厳密な形式に他ならないのである．表現 ρ_Q は **Q-空間表現**ともよばれる ($\mathscr{H}$ が有限次元の場合については，問題 17, 18 を参照)[31)]．

Simon and Høegh-Krohn (1972) は Q-空間表現を用いた解析を抽象的なレヴェルで大きく発展させた．Q-空間表現では確率論的な手法が使用できるので，問題によってはかなり詳しい解析ができ，深い結果を導出することが可能である．特に，$H := Ud\Gamma_{\mathrm{b}}(T)U^{-1} + V$ (T は $\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素，V は $Q_{\mathscr{H}}$ 上の関数) という形の作用素に対して，適当な条件のもとで，それが生成する半群 e^{-tH} $(t > 0)$ に対して，厳密な**汎関数積分表示** (**経路積分表示**) を確立することができる (たとえば，Simon (1974)，Simon (1979)，江沢-新井 (1988)，Arai (1989b, 1992a, 1996a) を参照)．また，Q-空間表現は，ホワイトノイズ解析 (Hida 他 (1993), Obata (1994)) とも密接な関連がある．これについては，手短な説明が新井 (1997b) の 9 章にある．

4 章演習問題

$\mathscr{H}$ はヒルベルト空間とする．

♮**1.** $f \neq 0$ $(f \in \mathscr{H})$ ならば，$A(f)$ は非有界であることを示せ．

ヒント　各 $N \geq 1$ に対して，ベクトル $\Psi_N = \{\Psi_N^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ を $n = N$ のとき $\Psi_N^{(n)} := f^n/\|f^n\|$，$n \neq N$ のとき $\Psi_N^{(n)} := 0$ によって定義する．このとき，$\|\Psi_N\| = 1$ であり，$\|A(f)\Psi_N\| \longrightarrow \infty$ $(N \longrightarrow \infty)$ を示せ．

♮**2.** $f \neq 0$ $(f \in \mathscr{H})$ ならば，$A(f)^*$ は非有界であることを示せ．

ヒント　問題 1 と同様の考え方．次の問題 3 と問題 1 を応用してもよい．

♮**3.** T をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の稠密に定義された非有界線形作用素で $D(T^*)$ は稠密であるとする．このとき，T^* は非有界であることを示せ．

ヒント　$D(T^*)$ の稠密性により，$\|T\psi\| = \sup_{\phi\in D(T^*);\|\phi\|=1} |\langle\phi, T\psi\rangle|$ と書けることおよび $\langle\phi, T\psi\rangle = \langle T^*\phi, \psi\rangle$ を用いよ．

4. CCR と (2.17) だけを用いて，(4.20) を証明せよ．

ヒント $\langle A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}, A(g_1)^* \cdots A(g_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}\rangle = \langle A(f_2)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}, A(f_1) A(g_1)^* \cdots A(g_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}\rangle$ と変形し，この内積における右側のベクトルを，CCR を用いて計算せよ．

---

31) Segal (1956) によって発見された．

5. 任意の $f \in \mathscr{H}$ とすべての $\Psi \in D(A(f)^*)$ に対して，$\|A(f)^*\Psi\| \geq \|f\|\|\Psi\|$ を示せ.

ヒント (4.49) と，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ が $A(f)^*$ の芯であることを用いよ.

6. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ 上の CONS とし，

$$a_n := A(e_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

とおく ($A(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の消滅作用素).

(i) 任意の $f \in \mathscr{H}$ と $\Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して，

$$A(f)\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle a_n \Psi, \quad A(f)^*\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, f \rangle a_n^* \Psi,$$

を示せ.

(ii) $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ 上で CCR

$$[a_n, a_m^*] = \delta_{nm}, \quad [a_n, a_m] = 0, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

が成立することを示せ.

(iii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$q_n := \frac{1}{\sqrt{2}}(a_n^* + a_n) = \Phi_{\mathrm{S}}(e_n), \quad p_n := \frac{i}{\sqrt{2}}(a_n^* - a_n) = \Pi_{\mathrm{S}}(e_n),$$

とおく．このとき，$\{q_n, p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は可算無限自由度の CCR の表現をあたえること，すなわち，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ 上で

$$[q_n, p_m] = i\delta_{nm}, \quad [q_n, q_m] = 0, \quad [p_n, p_m] = 0, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

をみたすことを示せ.

♮**7.** $f \neq 0$ ($f \in \mathscr{H}$) ならば，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は非有界であることを示せ.

ヒント 問題 1 と同様.

♮**8.** $f \neq 0$ ($f \in \mathscr{H}$) ならば，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は上にも下にも有界でないこと，すなわち，

$$\inf_{\Psi \in D(\Phi_{\mathrm{S}}(f)); \|\Psi\|=1} \langle \Psi, \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi \rangle = -\infty, \qquad \sup_{\Psi \in D(\Phi_{\mathrm{S}}(f)); \|\Psi\|=1} \langle \Psi, \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi \rangle = \infty$$

を証明せよ.

ヒント $\|g\| = 1$, $\langle f, g \rangle \neq 0$ をみたす $g \in \mathscr{H}$ を任意に固定し，各 $N \geq 1$ に対して，ベクトル $\Psi_N = \{\Psi_N^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ を $n = N, N+1$ のとき，$\Psi_N^{(n)} := g^n/\sqrt{2}$，$n \neq N, N+1$ のとき，$\Psi_N^{(n)} := 0$ によって定義する．直接計算により，$\|\Psi_N\| = 1$ であり，$\langle f, g \rangle > 0$ ならば $\langle \Psi_N, \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi_N \rangle \longrightarrow \infty$ ($N \longrightarrow \infty$)，$\langle f, g \rangle < 0$ ならば $\langle \Psi_N, \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi_N \rangle \longrightarrow -\infty$ ($N \longrightarrow \infty$)，を示せ.

♮**9.** 定理 4-34 を証明せよ.

♮**10.** 補題 4-38 の証明の詳細を埋めよ.

11. 任意の $f, g \in \mathscr{H}$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ 上で交換関係

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Pi_{\mathrm{S}}(g)] = i\mathrm{Re}\,\langle f, g\rangle$$

が成立することを示せ．

12. $U : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{K}$ をユニタリ作用素，T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．定理 4-47 を次の手順で証明せよ．

(i)　任意の $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(UTU^{-1}))$ に対して，

$$\Gamma_{\mathrm{b}}(U)d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Gamma_{\mathrm{b}}(U)^{-1}\Phi = d\Gamma_{\mathrm{b}}(UTU^{-1})\Phi$$

を示せ．

(ii)　任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ に対して，

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi = \Gamma_{\mathrm{b}}(U)^{-1}d\Gamma_{\mathrm{b}}(UTU^{-1})\Gamma_{\mathrm{b}}(U)\Psi$$

を示せ．

(iii)　(i), (ii) と補題 4-40 を用いて，定理 4-47 の結論を導け．

13. $\mathscr{H}$ のベクトル列 $\boldsymbol{f} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($f_n \in \mathscr{H}$) で

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f_n\|^{2n}}{n!} < \infty$$

をみたすものに対して，

$$\exp \boldsymbol{f} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(f_n)^{*n}\Omega_{\mathscr{H}}}{n!}$$

は収束することを示せ．

14. $\mathscr{F}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{F}$ の稠密な部分空間とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，C_n は，ヒルベルト空間 $\mathscr{F}$ 上の稠密に定義された閉線形作用素で，$C_n\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$, $C_n^*\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$ をみたし，$\mathscr{D}$ 上で無限自由度の CCR

$$[C_n, C_m^*] = \delta_{nm}, \quad [C_n, C_m] = 0, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

をみたすものとする．$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ の CONS とする．任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|C_n\Psi\|^2}{|\lambda_n|^2} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|C_n^*\Psi\|^2}{|\lambda_n|^2} < \infty,$$

をみたす数列 $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\lambda_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$) を固定し，

$$\mathscr{H}_\lambda := \left\{ f \in \mathscr{H} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle f, e_n\rangle|^2 < \infty \right\}$$

を導入する．

(i)　任意の $f \in \mathscr{H}_\lambda$ と $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して，

$$\hat{C}(f)\Psi := \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle C_n\Psi, \quad \hat{C}^{\dagger}(f)\Psi := \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, f\rangle C_n^*\Psi,$$

は収束することを示せ．さらに，$\hat{C}^\dagger(f) \subset \hat{C}(f)^*$ を示せ．

(ii) 任意の $\Psi \in \mathscr{D}$, $f \in \mathscr{H}_\lambda$ に対して $\hat{C}^\sharp(f)\Psi \in D(C_n) \cap D(C_n^*)$ であり，

$$C_n\hat{C}(f)\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, e_m\rangle C_n C_m \Psi, \quad C_n^*\hat{C}(f)\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, e_m\rangle C_n^* C_m \Psi,$$

$$C_n\hat{C}^\dagger(f)\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \langle e_m, f\rangle C_n C_m^* \Psi, \quad C_n^*\hat{C}^\dagger(f)\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \langle e_m, f\rangle C_n^* C_m^* \Psi,$$

が成立することを示せ．

(iii) $\mathscr{D}$ 上で交換関係

$$[\hat{C}(f), C_n] = 0, \quad [\hat{C}^\dagger(f), C_n] = -\langle e_n, f\rangle,$$

が成立することを示せ．

(iv) 任意の Ψ, $\Phi \in \mathscr{D}$, f, $g \in \mathscr{H}_\lambda$ に対して，

$$\langle \hat{C}(f)^*\Psi, \hat{C}(g)^*\Phi\rangle - \langle \hat{C}(g)\Psi, \hat{C}(f)\Phi\rangle = \langle f, g\rangle\langle \Psi, \Phi\rangle,$$

$$\langle \hat{C}(f)^*\Psi, \hat{C}(g)\Phi\rangle - \langle \hat{C}(g)^*\Psi, \hat{C}(f)\Phi\rangle = 0,$$

を示せ．

注意 (iv) における交換関係を $\mathscr{D}$ 上の弱い意味での **CCR** という．

15. Segal の場の作用素の積 $\Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_n)$ ($f_j \in \mathscr{H}$, $j = 1, \cdots, n$) に対して，**Wick 積** (Wick product) とよばれる積 $:\Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_n):$ を次にように定義する ($I_n := \{1, \cdots, n\}$ とおく)：

$$:\Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_n) := \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{B\subset I_n} \left(\prod_{i\in B} A(f_i)^*\right)\left(\prod_{j\in I_n\setminus B} A(f_j)\right).$$

ここで，$\sum_{B\subset I_n}$ は I_n のすべての部分集合 B にわたる和を表す ($B = \varnothing$ の場合も含む：$\prod_{i\in\varnothing} \cdot := I$ と規約する)．以下，$f_j \in \mathscr{H}$ ($j = 1, \cdots, n$), $g_k \in \mathscr{H}$ ($k = 1, \cdots, m$), n, $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{H}$ は任意とする．

(i)

$$:\Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_n):\Omega_{\mathscr{H}} = \frac{1}{2^{n/2}} A(f_1)^* \cdots A(f_n)^*\Omega_{\mathscr{H}}$$

を示せ．

(ii)

$$\langle :\Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(f_n):\Omega_{\mathscr{H}}, :\Phi_{\mathrm{S}}(g_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(g_m):\Omega_{\mathscr{H}}\rangle$$

$$= \delta_{nm}\frac{1}{2^n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \langle f_1, g_{\sigma(1)}\rangle \cdots \langle f_n, g_{\sigma(n)}\rangle$$

を示せ．

(iii)

$$:\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n := \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!}\Phi_{\mathrm{S}}(f)^{n-2k}\left(-\frac{\|f\|^2}{4}\right)^k$$

を示せ．ただし，$x \geq 0$ に対して，$[x]$ は x を越えない最大の整数を表す (ガウス記号).

(iv)　すべての $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$:e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}:\Psi := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n :\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n:}{n!}\Psi$$

は強収束し，

$$:e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}:\Psi = e^{z\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}e^{-z^2\|f\|^2/4}\Psi$$

が成り立つことを示せ.

ヒント　江沢-新井 (1988) の pp.76～79 を参照.

16. (4.123) で定義される CCR の表現 $\{B_L(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ に同伴する場の作用素

$$\Phi_{B_L}(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\{B_L(f) + B_L(f)^*\}$$

を考える ($\mathscr{V}$ は $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間).

(i)　$\Phi_{B_L}(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V})$ 上で本質的に自己共役であることを示せ.

ヒント　$\Phi_{B_L}(f) = \Phi_{\mathrm{S}}(f) + \eta(f)$, $\eta(f) := \{L(f) + L(f)^*\}/\sqrt{2}$ と書けて，$\eta(f)$ はスカラー作用素 (スカラーをかける作用素) であることに注意し，次の定理を応用せよ.

> **定理**　T を自己共役作用素とするとき，任意の実定数 c に対して，$T + c$ は自己共役であり，T の任意の芯上で本質的に自己共役である

この定理は，定理 2-9，定理 2-11 の判定条件をチェックすることより，容易に証明される.

(ii)　$W_L(f) := e^{i\overline{\Phi_{B_L}(f)}}$ とおくとき，

$$W_L(f)W_L(g) = e^{\mathrm{Im}\,\langle f,g\rangle/2i}W_L(f+g), \quad f, g \in \mathscr{V},$$

であり，$\{W_L(tf)\}_{t\in\mathbf{R}}$ は強連続 1 パラメータユニタリ群であることを示せ.

ヒント　一般に，自己共役作用素 T, S が強可換ならば，$T + S$ は本質的に自己共役であり，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{it(\overline{T+S})} = e^{itT}e^{itS} = e^{itS}e^{itT}$ が成り立つ (これは，定理 2-18 を，$N = 2$, $A_1 = T, A_2 = S$, $P(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2$ の場合に応用して得られる事実)．これを $T = \Phi_{\mathrm{S}}$, $S = \eta(f)$ として応用せよ.

(iii)　作用素の集合 $\{W_L(f)\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ が $\{e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}\,|\,f \in \mathscr{V}\}$ にユニタリ同値，すなわち，

$$UW_L(f)U^{-1} = e^{i\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}}, \quad f \in \mathscr{V},$$

をみたす，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U が存在するための必要十分条件は，ある $h \in \mathscr{H}$

が存在して，$L(f) = \langle h, f\rangle$ $(f \in \mathscr{V})$ と表されることである．これを証明せよ．

17. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathbb{C}$ 上の消滅作用素 $A(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ から，作用素 $A := A(1)$ をつくる．$L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素 a を

$$a := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\left(\frac{d}{dx} + x\right) \restriction \mathscr{S}(\mathbb{R})}$$

によって定義する ($\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ $(d \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の空間：付録 D を参照)．ベクトル $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ を

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

によって定義する．このとき，ユニタリ作用素 $V : \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ で，

$$V\Omega_{\mathbb{C}} = \psi_0, \quad VAV^{-1} = a$$

となるものがただ 1 つ存在することを示せ．

注意 V は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$ と $L^2(\mathbb{R})$ の同型をあたえる．この意味で，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}) \cong L^2(\mathbb{R})$ と記す．

18. $d \geq 1$ とし，d 次元ユニタリ空間 $\mathbb{C}^d$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}^d)$ 上の消滅作用素 $A(z)$ $(z = (z_1, \cdots, z_d) \in \mathbb{C}^d)$ から作用素

$$A_j := A(0, \cdots, 0, \overset{j\ 番目}{1}, 0, \cdots, 0)$$

$(j = 1, \cdots, d)$ をつくる．$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 a_j を

$$a_j := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(D_j + x_j)) \restriction \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)}$$

によって定義する．ベクトル $\Phi_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ を

$$\Phi_0(x) = \prod_{j=1}^{d} \psi_0(x_j), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

によって定義する (ψ_0 は前問のもの)．このとき，ユニタリ作用素 $V_d : \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ で，

$$V_d \Omega_{\mathbb{C}^d} = \Phi_0, \quad V_d A_j V_d^{-1} = a_j, \quad j = 1, \cdots, d,$$

となるものがただ 1 つ存在することを示せ．

第 5 章

フェルミオンフォック空間

同種の無数のフェルミオンからなる量子系を数学的にきちんと扱うための基礎となるフェルミオンフォック空間の理論を抽象的な形で述べる．

5-1 節　定義と基本的性質

$\mathscr{K}$ を可分なヒルベルト空間とし，自然数 p に対して，$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ を $\mathscr{K}$ 上の p 重反対称テンソル積とする (1 章 1-4 節)．便宜上，$\overset{0}{\wedge}(\mathscr{K}) := \mathbb{C}$ とおく．これらのヒルベルト空間の無限直和

$$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \overset{p}{\wedge}(\mathscr{K}) \tag{5.1}$$

を $\mathscr{K}$ **上のフェルミオンフォック空間**あるいは $\mathscr{K}$ **上の反対称フォック空間**という．これは，全フォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{K})$ の閉部分空間である．

注意 5-1　$\mathscr{K}$ が有限次元で，$\dim \mathscr{K} = k$ ならば，$p > k$ に対して，$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K}) = \{0\}$ であるので (1 章，注意 1-6)，$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K}) = \bigoplus_{p=0}^{k} \overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ である．ボソンフォック空間の場合との違いに注意．

A_p を $\overset{p}{\otimes}\mathscr{K}$ 上の反対称化作用素とし (1 章 1-4 節を参照)，全フォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{K})$ 上の作用素 P_{f} を

$$P_{\mathrm{f}} := \bigoplus_{p=0}^{\infty} A_p \tag{5.2}$$

によって定義すれば，命題 3-5 (vii) によって，P_{f} は，フェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$

上への正射影作用素である．

$\mathscr{F}_\mathrm{f}(\mathscr{K})$ の閉部分空間としての $\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ は，具体的な量子場のモデルの文脈では，n 個の同種のフェルミオンからなる系の状態空間を表す．このため，$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ は，フェルミオンの p **粒子空間**とよばれる．

命題 1-15 (ii) と命題 3-1 (ii) によって，次の事実が得られる．

命題 5-1 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\mathscr{K}$ の CONS とすれば，

$$\{\Omega_{\mathscr{K}}\}\cup\left[\bigcup_{p=1}^{\infty}\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\,|\,i_1<\cdots<i_p, i_j\in\mathbb{N}\}\right]$$

は $\mathscr{F}_\mathrm{f}(\mathscr{K})$ の CONS である．

例 5-1 (M,μ), M^p, $d\mu^p$ を例 3-1 のものとし，$\mathscr{K}=L^2(M,d\mu)$ の場合を考える．ヒルベルト空間 $L^2(M^p,d\mu^p)$ の元 ψ で完全反対称なもの，すなわち，任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ に対して，

$$\psi(m_1,\cdots,m_p)=\mathrm{sgn}(\sigma)\psi(m_{\sigma(1)},\cdots,m_{\sigma(p)}),\quad \mu\text{-a.e.}(m_1,\cdots,m_p)\in M^p$$

をみたすものの全体を $L^2_{\mathrm{as}}(M^p,d\mu^p)$ とおく．このとき，自然な同型

$$L^2(M^p,d\mu^p)\cong\overset{p}{\otimes}L^2(M,d\mu)$$

のもとで，$\overset{p}{\wedge}L^2(M,d\mu)$ の元 $A_p(\psi_1\otimes\cdots\otimes\psi_p)$ $(\psi_j\in L^2(M,d\mu),\ j=1,\cdots,p)$ と $L^2_{\mathrm{as}}(M^p,d\mu^p)$ の元

$$\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\psi_{\sigma(1)}(m_1)\cdots\psi_{\sigma(n)}(m_p)$$

が同一視される．これから，

$$\overset{p}{\wedge}(L^2(M,d\mu))=L^2_{\mathrm{as}}(M^p,d\mu^p)$$

という同一視が得られる．したがって，

$$\mathscr{F}_\mathrm{f}(L^2(M,d\mu))=\bigoplus_{p=0}^{\infty}L^2_{\mathrm{as}}(M^p,d\mu^p).$$

ただし，$L^2_{\mathrm{as}}(M^0,d\mu^0):=\mathbb{C}$ とする．

フェルミオンフォック空間における**有限粒子ベクトル部分空間**を

$$\wedge_0(\mathscr{K}):=P_\mathrm{f}\mathscr{F}_0(\mathscr{K})=\hat{\bigoplus_{p=0}^{\infty}}\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})\tag{5.3}$$

によって定義する．この部分空間は $\mathscr{F}_\mathrm{f}(\mathscr{K})$ で稠密である．

5-2 節　消滅作用素と生成作用素

5-2-1　定義

各 $p \geq 0$, $u \in \mathscr{K}$ と任意の $\Phi \in \overset{p+1}{\wedge}(\mathscr{K})$, $\Psi \in \overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ に対して，

$$Q_p(\Phi, \Psi) = \sqrt{p+1}\langle \Phi, A_{p+1}(u \otimes \Psi)\rangle \tag{5.4}$$

とおくと，Q_p は $\overset{p+1}{\wedge}(\mathscr{K}) \times \overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ 上の準双線形形式である．容易にわかるように，

$$|Q_p(\Phi, \Psi)| \leq \sqrt{p+1}\,\|u\|\|\Phi\|\|\Psi\|. \tag{5.5}$$

したがって，Q_p は有界である．ゆえに，補題 4-2 によって，

$$Q_p(\Phi, \Psi) = \langle B_p(u)\Phi, \Psi\rangle, \quad \Phi \in \overset{p+1}{\wedge}(\mathscr{K}), \Psi \in \overset{p}{\wedge}(\mathscr{K}), \tag{5.6}$$

をみたす有界線形作用素 $B_p(u) : \overset{p+1}{\wedge}(\mathscr{K}) \longrightarrow \overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ が一意的に存在する．この場合，(5.5) によって，

$$\|B_p(u)\Phi\| \leq \sqrt{p+1}\,\|u\|\|\Phi\|. \tag{5.7}$$

この作用素 B_p を用いて，各 $u \in \mathscr{K}$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ 上の線形作用素 $B(u)$ を次のように定義する：

$$D(B(u)) = \left\{\Psi = \{\Psi_p\}_{p=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K}) \;\middle|\; \sum_{p=0}^{\infty} \|B_p(u)\Psi^{(p+1)}\|^2 < \infty\right\}, \tag{5.8a}$$

$$(B(u)\Psi)^{(p)} = B_p(u)\Psi^{(p+1)}, \quad p \geq 0, \Psi \in D(B(u)). \tag{5.8b}$$

作用素 $B(u)$ は閉作用素であり，$\wedge_0(\mathscr{K})$ は $B(u)$ の芯 (core) である．また，$B(u)$ は $\wedge_0(\mathscr{K})$ を不変にし，$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ を $\overset{p-1}{\wedge}(\mathscr{K})$ にうつす ($\overset{-1}{\wedge}(\mathscr{K}) := \{0\}$ とする)．つまり，$B(u)$ はフェルミオンを 1 つ減らす働きをする．そこで，$B(u)$ を (フェルミオン) **消滅作用素** (annihilation operator) とよぶ．

$$\cdots \longleftarrow \overset{p-1}{\wedge}(\mathscr{K}) \xleftarrow{B_{p-1}(u)} \overset{p}{\wedge}(\mathscr{K}) \xleftarrow{B_p(u)} \overset{p+1}{\wedge}(\mathscr{K}) \xleftarrow{B_{p+1}(u)} \cdots.$$

容易にわかるように，すべての $u \in \mathscr{K}$ に対して，

$$B(u)\Omega_{\mathscr{K}} = 0. \tag{5.9}$$

消滅作用素 $B(u)$ のより具体的な作用は，(5.4), (5.6), (5.8b) を用いて，ボソン消滅作用素 $A(f)$ の場合と同様な仕方で，次のように計算される：

$$\Psi_p^{(p)} = A_p(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_p) \quad \psi_j \in \mathscr{K},\ j = 1, \cdots, p, \tag{5.10a}$$

$$\Psi_p^{(q)} = 0,\ q \neq p, \tag{5.10b}$$

であるようなベクトル $\Psi_p = \{\Psi_p^{(q)}\}_{q=0}^{\infty}$ に対して,

$$(B(u)\Psi_p)^{(p-1)} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \langle u, \psi_j \rangle A_{p-1}(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\psi_j} \otimes \cdots \otimes \psi_p), \tag{5.11a}$$

$$(B(u)\Psi_p)^{(q)} = 0, \quad q \neq p-1. \tag{5.11b}$$

右辺に符号因子 $(-1)^{j-1}$ が現れることに注意しよう.

(5.4), (5.6), (5.8b) から，$B(u)$ の共役作用素 $B(u)^*$ について,

$$D(B(u)^*) = \left\{ \Psi = \{\Psi_p\}_{p=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K}) \;\middle|\; \sum_{p=1}^{\infty} p \|A_p(u \otimes \Psi^{(p-1)})\|^2 < \infty \right\}, \tag{5.12a}$$

$$(B(u)^*\Psi)^{(0)} = 0, \tag{5.12b}$$

$$(B(u)^*\Psi)^{(p)} = B_{p-1}^*(u)\Psi^{(p-1)} = \sqrt{p}A_p(u \otimes \Psi^{(p-1)}), \quad p \geq 1, \tag{5.12c}$$

が成り立つことがわかる．作用素 $B(u)^*$ は $\wedge_0(\mathscr{K})$ を不変にし，$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ を $\overset{p+1}{\wedge}(\mathscr{K})$ にうつす．つまり，$B(u)^*$ はフェルミオンを 1 つふやす機能をもっている．このことから，$B(u)^*$ は (フェルミオン) **生成作用素** (creation operator) とよばれる.

$$\cdots \longrightarrow \overset{p-1}{\wedge}(\mathscr{K}) \xrightarrow{B_{p-1}(u)^*} \overset{p}{\wedge}(\mathscr{K}) \xrightarrow{B_p(u)^*} \overset{p+1}{\wedge}(\mathscr{K}) \xrightarrow{B_{p+1}^*(u)} \cdots$$

(5.10a), (5.10b) で定義されるベクトル Ψ_p に対して,

$$(B(u)^*\Psi_p)^{(p+1)} = \sqrt{p+1}A_{p+1}(u \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_p), \tag{5.13a}$$

$$(B(u)^*\Psi_p)^{(q)} = 0, \quad q \neq p+1, \tag{5.13b}$$

であることがわかる.

例 5-2　例 5-1 のフェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(M, d\mu))$ における，$B(u)$ と $B(u)^*$ の作用は，自然な同一視 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(M, d\mu)) \cong \bigoplus_{p=0}^{\infty} L_{\mathrm{as}}^2(M^p, d\mu^p)$ のもとで，次の形をもつことがわかる：

$$(B(u)\Psi)^{(p)}(m_1, \cdots, m_p) = \sqrt{p+1} \int_M u(m)^* \Psi^{(p+1)}(m, m_1, \cdots, m_p)\, d\mu(m),$$

$\Psi \in D(B(u)),\ p \geq 0,$

$$(B(u)^*\Psi)^{(p)}(m_1, \cdots, m_p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} u(m_j) \Psi^{(p-1)}(m_1, \cdots, \hat{m}_j, \cdots, m_p),$$

$\Psi \in D(B(u)^*),\ p \geq 1.$

証明は，ボソンの場合 (例 4-2) と同様である．

5-2-2　正準反交換関係

一般に同一のヒルベルト空間で働く作用素 A, B に対して，

$$\{A, B\} := AB + BA \tag{5.14}$$

とおき $(D(\{A,B\}) := D(AB) \cap D(BA))$，これを A と B の**反交換子** (anti-commutator) という．

$\mathscr{K}$ の部分空間 D に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ の部分空間

$$\wedge_{\mathrm{fin}}(D) := \left\{ \Psi = \{\Psi^{(p)}\}_{p=0}^{\infty} \in \wedge_0(\mathscr{K}) \ \middle|\ \Psi^{(p)} \in A_p\left(\overset{p}{\hat{\otimes}} D\right),\ p \geq 1 \right\} \tag{5.15}$$

を導入する．D が $\mathscr{K}$ で稠密ならば，各 $A_p\left(\overset{p}{\hat{\otimes}} D\right)$ は $\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ で稠密であるから，$\wedge_{\mathrm{fin}}(D)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ で稠密である．

(5.13a), (5.13b) を繰り返し使うと，任意の $u_1, \cdots, u_n \in \mathscr{K}$ に対して

$$\begin{aligned}(B(u_1)^* \cdots B(u_n)^* \Omega_{\mathscr{K}})^{(p)} &= \delta_{np} \sqrt{p!}\, A_p(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \\ &= \delta_{np} u_1 \wedge \cdots \wedge u_n. \end{aligned} \tag{5.16}$$

したがって，

$$\wedge_{\mathrm{fin}}(D) = \mathscr{L}\{\Omega_{\mathscr{K}}, B(u_1)^* \cdots B(u_p)^* \Omega_{\mathscr{K}} \,|\, p \geq 1, u_j \in D, j = 1, \cdots, p\}. \tag{5.17}$$

生成・消滅作用素に関する次の事実は基本的である．

定理 5-2　任意の $u \in \mathscr{K}$ に対して，$B(u)$, $B(u)^*$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ 全体で定義された有界作用素であり，

$$\|B(u)^\sharp\| = \|u\| \tag{5.18}$$

が成り立つ．さらに，任意の u, $v \in \mathscr{K}$ に対して，次の反交換関係が成り立つ：

$$\{B(u), B(v)^*\} = \langle u, v \rangle, \tag{5.19a}$$

$$\{B(u), B(v)\} = 0, \quad \{B(u)^*, B(v)^*\} = 0. \tag{5.19b}$$

証明 (5.10a), (5.10b) で定義されるベクトル Ψ_p に対して，(5.11a), (5.11b), (5.13a), (5.13b) を用いると，

$$(B(u)B(v)^*\Psi_p)^{(p)}$$
$$= \langle u, v\rangle \Psi_p^{(p)} - \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \langle u, \psi_j\rangle A_p(v \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{j-1} \otimes \psi_{j+1} \otimes \cdots \otimes \psi_p),$$

$$(B(u)B(v)^*\Psi_p)^{(q)} = 0, \quad q \neq p,$$

$$(B(v)^*B(u)\Psi_p)^{(p)}$$
$$= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \langle u, \psi_j\rangle A_p(v \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{j-1} \otimes \psi_{j+1} \otimes \cdots \otimes \psi_p),$$

$$(B(v)^*B(u)\Psi_p)^{(q)} = 0, \quad q \neq p.$$

したがって，$\{B(u), B(v)^*\}\Psi_p = \langle u, v\rangle\Psi_p$．$\wedge_{\mathrm{fin}}(\mathscr{K})$ は $\Psi_p (p \in \mathbb{N})$ の形のベクトルによって生成されるから，任意の $\Psi \in \wedge_{\mathrm{fin}}(\mathscr{K})$ に対して，

$$\{B(u), B(v)^*\}\Psi = \langle u, v\rangle\Psi \tag{5.20}$$

が成り立つ．ここで，特に，$u = v$ の場合を考えると，

$$\|B(u)^*\Psi\|^2 + \|B(u)\Psi\|^2 = \|u\|^2\|\Psi\|^2. \tag{5.21}$$

したがって，$\|B(u)^\sharp\Psi\| \leq \|u\|\|\Psi\|$．これは，$B(u)^\sharp$ が有界であり，

$$\|B(u)^\sharp\| \leq \|u\| \tag{5.22}$$

を意味する．$B(u)^\sharp$ は閉作用素であり，$\wedge_{\mathrm{fin}}(\mathscr{K})$ は稠密であるから，$B(u)^\sharp$ は定義域を $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ 全体とする有界作用素である[1]．(5.20) で $\Psi = \Omega_{\mathscr{K}}$ とすれば，(5.9) により，

$$\|B(u)^*\Omega_{\mathscr{K}}\|^2 = \|u\|^2.$$

これは，$\|B(u)^*\| \geq \|u\|$ を意味する．これと (5.22) により，$\|B(u)^*\| = \|u\|$．$B(u) =$

---

[1] 一般に，$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ をヒルベルト空間，T を $\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への稠密に定義された閉作用素とするとき，T が有界ならば，$D(T) = \mathscr{H}$ である (証明せよ)．

$(B(u)^*)^*$ であるから，$\|B(u)\| = \|B(u)^*\| = \|u\|$，すなわち，(5.18) を得る[2]．

今示した $B(u)^\sharp$ の有界性と $\wedge_{\mathrm{fin}}(\mathscr{K})$ の稠密性によって，(5.20) はすべての $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ へと拡張される．したがって，(5.19a) が得られる．同様に，(5.19b) も証明される．□

定理 5-2 は，フェルミオンの生成・消滅作用素が，ボソンのそれとは対照的に，有界な作用素であることを示す．

(5.19a), (5.19b) は**正準反交換関係** (canonical anti-commutation relations ; CAR) とよばれる．(5.19b) において，$u = v$ とすれば，

$$B(u)^2 = 0, \quad B(u)^{*2} = 0, \quad u \in \mathscr{K}, \tag{5.23}$$

であることに注意しよう．つまり，すべての $u \in K$ に対して，$B(u)^\sharp$ は巾(べき)零作用素である．

5-3 節　第 2 量子化作用素

フェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ においても，ボソンフォック空間の場合と同様に，第 2 量子化作用素が定義される．

T を $\mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とすれば，命題 4-11 と同様にして，$\overset{p}{\otimes}\mathscr{K}$ 上の作用素 $T^{(p)}$ は，$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ に簡約されることがわかる．この簡約部分を $T_{\mathrm{f}}^{(p)}$ で表す：

$$T_{\mathrm{f}}^{(p)} := T^{(p)}{}_{\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})}, \quad p \geq 2. \tag{5.24}$$

便宜上，$T_{\mathrm{f}}^{(0)} = 0$, $T_{\mathrm{f}}^{(1)} := T$ とおく．命題 4-10 (iv) により，$T_{\mathrm{f}}^{(p)}$ は閉である．

命題 4-13 と同様にして，次の事実が証明される．

命題 5-3　T を $\mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．

(i)　$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ は，全フォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{K})$ 上の第 2 量子化作用素 $d\Gamma(T)$ を簡約する．その簡約部分を $d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)$ とすれば，作用素の等式

$$d\Gamma_{\mathrm{f}}(T) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T_{\mathrm{f}}^{(p)}$$

が成り立つ．

---

[2] 一般に，ヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ において，$\mathscr{X}$ 全体を定義域とする，任意の有界線形作用素 T について，$\|T^*\| = \|T\|$ が成り立つ．新井 (1997a) の命題 2.15．

(ii) T が自己共役で，$\mathscr{D} \subset \mathscr{K}$ が T^n $(n \in \mathbb{N})$ の芯ならば，$\wedge_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ は $d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)^n$ の芯である．

以後，

$$d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(T) := T_{\mathrm{f}}^{(p)} \tag{5.25}$$

とも記す．命題 5-3 (i) によって，

$$d\Gamma_{\mathrm{f}}(T) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(T). \tag{5.26}$$

第 2 種の第 2 量子化作用素についても，ボソンフォック空間の場合と同様に議論できる．T を $\mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とする．命題 4-13 (i) と同様にして，各 $p \geq 2$ に対して，$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ は $\overset{p}{\otimes} T$ を簡約することが証明される．作用素 $\overset{p}{\otimes} T$ の $\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ における簡約部分を $\overset{p}{\wedge}(T)$ と記す：

$$\overset{p}{\wedge}(T) := \left(\overset{p}{\otimes} T\right)_{\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})}. \tag{5.27}$$

$p = 0, 1$ に対しては，$\overset{0}{\wedge}(T) := 1$, $\overset{1}{\wedge}(T) := T$ とする．

定理 5-4

(i) フェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ は $\mathscr{F}(\mathscr{K})$ 上の作用素 $\Gamma(T)$ を簡約する．その簡約部分を $\Gamma_{\mathrm{f}}(T)$ とすれば

$$\Gamma_{\mathrm{f}}(T) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \overset{p}{\wedge}(T).$$

(ii) T が自己共役ならば，$\Gamma_{\mathrm{f}}(T)$ は自己共役である．

(iii) T がユニタリならば，$\Gamma_{\mathrm{f}}(T)$ はユニタリである．

(iv) T が縮小作用素ならば，$\Gamma_{\mathrm{f}}(T)$ は縮小作用素である．

証明　定理 4-15, 定理 4-16 の証明と同様．　□

定理 4-17 の証明と同様にして次の定理が証明される．

定理 5-5　T を $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素とする．

(i) すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\Gamma_{\mathrm{f}}(e^{itT}) = e^{itd\Gamma_{\mathrm{f}}(T)}.$$

(ii)　$T \geq 0$ ならば，$d\Gamma_{\mathrm{f}}(T) \geq 0$ であり，すべての $t \geq 0$ に対して，

$$\Gamma_{\mathrm{f}}(e^{-tT}) = e^{-td\Gamma_{\mathrm{f}}(T)}.$$

最後に，第 2 量子化作用素の交換特性を証明なしで述べておく．証明は，ボソンフォック空間における場合と全く同様である．

命題 5-6　S, T を $\mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とし，$D([S,T]) := D(ST) \cap D(TS)$ は稠密であり，$[S,T]$ は可閉であるとする．このとき，$\wedge_{\mathrm{fin}}(D([S,T])) \subset D([d\Gamma_{\mathrm{f}}(S), d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)])$ であり，任意の $\Psi \in \wedge_{\mathrm{fin}}(D([S,T]))$ に対して，

$$[d\Gamma_{\mathrm{f}}(S), d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)]\Psi = d\Gamma_{\mathrm{f}}([S,T])\Psi$$

が成り立つ．

全フォック空間上の個数作用素 $\hat{N}$ の $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{H})$ における簡約部分を N_{f} と記す：

$$N_{\mathrm{f}} := \hat{N}_{\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{H})} = d\Gamma_{\mathrm{f}}(I). \tag{5.28}$$

これを**フェルミオン個数作用素**という．

命題 5-7　T を $\mathscr{K}$ 上の稠密に定義された可閉作用素とすれば，$\wedge_{\mathrm{fin}}(D(T)) \subset D([N_{\mathrm{f}}, d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)])$ であり，任意の $\Psi \in \wedge_{\mathrm{fin}}(D(T))$ に対して，

$$[N_{\mathrm{f}}, d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)]\Psi = 0.$$

命題 5-8　S, T は $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素とする．

(i)　$d\Gamma_{\mathrm{f}}(S)$ と $d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)$ が強可換であるための必要十分条件は，S と T が強可換となることである．

(ii)　N_{f} と $d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)$ は強可換である．

5-4 節　第 2 量子化作用素と生成・消滅作用素の関係

定理 5-9　T を $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，任意の $u \in D(T)$ に対して，$B(u)^\sharp$ は $D(d\Gamma_{\mathrm{f}}(T))$ を不変にし，$D(d\Gamma_{\mathrm{f}}(T))$ 上で交換関係

$$[d\Gamma_{\mathrm{f}}(T), B(u)^*] = B(Tu)^*, \tag{5.29a}$$

$$[d\Gamma_{\mathrm{f}}(T), B(u)] = -B(Tu), \tag{5.29b}$$

が成り立つ．

証明 命題 4-26 と同様にして，部分空間 $\wedge_{\mathrm{fin}}(D(T))$ 上で (5.29a), (5.29b) を示すことができる．$\wedge_{\mathrm{fin}}(D(T))$ は $d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)$ の芯であるから，任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{f}}(T))$ に対して，$\Psi_n \longrightarrow \Psi$, $d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)\Psi_n \longrightarrow d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる $\Psi_n \in \wedge_{\mathrm{fin}}(D(T))$ が存在する．すでに示したことから，

$$d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)B(u)^*\Psi_n = B(u)^*d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)\Psi_n + B(Tu)^*\Psi_n.$$

$B(\cdot)^*$ は有界であるから，$B(u)^*\Psi_n \longrightarrow B(u)^*\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ であり，上式の右辺は，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$B(u)^*d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)B(u)^*\Psi + B(Tu)^*\Psi$ に収束する．したがって，$d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)$ の閉性により，$B(u)^*\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{f}}(T))$ かつ $d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)B(u)^*\Psi = B(u)^*d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)\Psi + B(Tu)^*\Psi$ が成立する．ゆえに，$B(u)^*$ は $D(d\Gamma_{\mathrm{f}}(T))$ を不変にし，$D(d\Gamma_{\mathrm{f}}(T))$ 上で (5.29a) が成り立つ．$B(u)$ についての主張も同様にして証明できる． □

定理 5-10 T を $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{itd\Gamma_{\mathrm{f}}(T)}B(u)e^{-itd\Gamma_{\mathrm{f}}(T)} = B(e^{itT}u), \tag{5.30a}$$

$$e^{itd\Gamma_{\mathrm{f}}(T)}B(u)^*e^{-itd\Gamma_{\mathrm{f}}(T)} = B(e^{itT}u)^*. \tag{5.30b}$$

証明 $\Psi = B(u_1)^* \cdots B(u_p)^*\Omega_{\mathscr{K}}$ $(u_j \in \mathscr{K}, j = 1, \cdots, p)$ とすれば，(5.16) によって，

$$B(u)^*\Gamma_{\mathrm{f}}(e^{-itT})\Psi = B(u)^*B(e^{-itT}u_1)^* \cdots B(e^{-itT}u_p)^*\Omega_{\mathscr{K}}.$$

したがって，

$$\Gamma_{\mathrm{f}}(e^{itT})B(u)^*\Gamma_{\mathrm{f}}(e^{-itT})\Psi = B(e^{itT}u)^*B(u_1)^* \cdots B(u_p)^*\Omega_{\mathscr{K}} = B(e^{itT}u)^*\Psi.$$

したがって，(5.17) によって，$\wedge_{\mathrm{fin}}(\mathscr{K})$ 上で，

$$\Gamma_{\mathrm{f}}(e^{itT})B(u)^*\Gamma_{\mathrm{f}}(e^{-itT}u) = B(e^{itT})^* \tag{5.31}$$

が成り立つ．両辺とも有界作用素であるから，作用素の等式として (5.31) は成り立つ．この事実と定理 5-5 (i) により，(5.30b) が得られる．(5.30a) は，(5.30b) の共役をとればよい． □

ノート

フェルミオンフォック空間の理論は，枠構造的には，ボソンフォック空間の理論とほとんど並行的に構成されるので (対称と反対称の呼応)，本章の叙述は必要最小限にとどめた．もちろん，

フェルミオンフォック空間の理論は，内容的には，ボソンフォック空間の理論と本質的な違いがあるのは言うまでもない．

4 章のノートで書いたような表現論的な観点をとれば，フェルミオンフォック空間は，CAR の表現空間の 1 つとして位置づけられる．CCR の場合と同様，CAR の表現からもいろいろな無限次元代数の表現を構成することが可能である．

フェルミオンフォック空間の理論の純数学的な応用として，**無限行列式** (infinite determinant) の理論がある．$\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，T を $\mathscr{K}$ 上のトレース型作用素としよう．すなわち，T は $\mathscr{K}$ 上の有界線形作用素で，ある CONS $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty}\langle e_n, |T|e_n\rangle < \infty$ をみたすものとする ($|T| := (T^*T)^{1/2}$)[3]．このとき，各 $\overset{p}{\wedge}(T)$ はトレース型であり，

$$\det(1+T) := \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(\overset{p}{\wedge}(T)\right) = \mathrm{Tr}\ \Gamma_{\mathrm{f}}(T)$$

が定義される．ここで，Tr はトレースを表す[4]．$\det(1+T)$ を作用素 $1+T$ の行列式という．この行列式の概念は有限次数の行列の行列式の一般化になっていることが示される (問題 9 を参照)．

無限行列式の概念は，歴史的には，あるクラスの積分作用素に関して，I. Fredoholm (1903) によって導入された．他方，場の量子論の文脈において無限行列式の概念の重要性が示唆されるのは 1950 年代になってからであった (Matthews and Salam (1954))．これを契機として，1960 年代後半から始まる，フェルミオンとボソンの相互作用を記述する相対論的量子場のモデルの数学的に厳密な構成の研究の過程を通して，無限行列式の理論は一段と深められていった (Seiler (1975), Seiler and Siomn (1975), Gross (1977), Seiler (1980))．

無限行列式の理論の詳細については，たとえば，Reed and Simon (1978), §XIII.17, pp.316～338, Simon (1977) を参照．

5 章演習問題

$\mathscr{K}$ はヒルベルト空間，$B(\cdot)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ 上の消滅作用素とする．

1. すべての $u \in \mathscr{K}$ に対して，$B(u)\Psi = 0$ となるベクトル $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ は $\Omega_{\mathscr{K}}$ の定数倍に限られることを示せ．

2. 任意の $u \in \mathscr{K}$ に対して，$\wedge_0(\mathscr{K})$ は，$B(u)$ および $B(u)^*$ の芯であることを証明せよ．

3. 任意の $u_j, v_j \in \mathscr{K}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，次の式を証明せよ．

---

[3] トレース型作用素の理論については，たとえば，加藤 (1967) の §49 (この本では，トレース型作用素のことをスプール型作用素と呼んでいる)，日合-柳 (1995) の §4.2 を参照．

[4] S をトレース型作用素とするとき，$\mathrm{Tr}\, S := \sum_{n=1}^{\infty}\langle e_n, Se_n\rangle$ (これは CONS $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の選び方によらないことが示される)．

$$\langle B(u_1)^* \cdots B(u_n)^* \Omega_{\mathscr{K}}, B(v_1)^* \cdots B(v_n)^* \Omega_{\mathscr{K}} \rangle = \det \left(\langle u_i, v_j \rangle \right)_{i,j=1,\cdots,n} .$$

ただし，$(\langle u_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\cdots,n}$ は (ij) 成分が $\langle u_i, v_j \rangle$ の $n \times n$ 行列を表す．

4. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{K}$ の CONS とし，

$$b_n := B(e_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

とおく．

(i)

$$\{b_n, b_m^*\} = \delta_{nm}, \quad \{b_n, b_m\} = 0, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

を示せ．

(ii) 任意の $u \in \mathscr{K}$ に対して，作用素のノルムの意味で，

$$B(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle b_n, \quad B(u)^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle b_n,$$

を示せ．

5. 各 $u \in \mathscr{K}$ に対して，

$$\psi(u) := B(u) + B(u)^*$$

とおく．

(i) 各 $\psi(u)$ は，有界な自己共役作用素であり，

$$\{\psi(u), \psi(v)\} = 2\mathrm{Re}\,\langle u, v \rangle, \quad u, v \in \mathscr{K},$$

という反交換関係をみたすことを示せ．

(ii) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{K}$ の CONS とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$X_n := x_n \psi(e_n), \quad Y_n := y_n \psi(ie_n),$$

とおく．ただし，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列である．このとき，X_n, Y_n は有界な自己共役作用素であり，

$$\{X_n, X_m\} = 2x_n^2 \delta_{nm},$$

$$\{Y_n, Y_m\} = 2y_n^2 \delta_{nm},$$

$$\{X_n, Y_m\} = 0, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

をみたすこと示せ．

6. $\mathscr{D}$ を $\mathscr{K}$ の稠密な部分空間とするとき，作用素の集合 $\{B(u), B(u)^* \mid u \in \mathscr{D}\}$ は既約であることを証明せよ．

ヒント　命題 4-6 の証明の方法を模倣せよ．

7. 任意の $T, S \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ に対して,

$$\overset{p}{\wedge}(S)\overset{p}{\wedge}(T) = \overset{p}{\wedge}(ST), \quad p \geq 0,$$

を示せ.

8. 任意の縮小作用素 $T, S \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ に対して,

$$\Gamma_{\mathrm{f}}(S)\Gamma_{\mathrm{f}}(T) = \Gamma_{\mathrm{f}}(ST)$$

を示せ.

9. $\mathscr{K}$ は有限次元とし, $\dim \mathscr{K} = n < \infty$ とする. T, S を $\mathscr{K}$ 上の任意の線形作用素とする.

(i)　$\dim \overset{n}{\wedge}(\mathscr{K}) = 1$ を示せ.

ヒント　1 章, 注意 1-6 を参照.

(ii)　$\overset{n}{\wedge}(T)$ はスカラー作用素 (スカラーをかける作用素) であることを示せ.

(iii)　(ii) で保証されるスカラーを $\det(T)$ と記す. このとき,

$$\det(T)\det(S) = \det(TS)$$

を示せ.

ヒント　問題 7 を応用せよ.

(iv)　$\mathscr{K}$ の任意の CONS $\{e_j\}_{j=1}^n$ に対して

$$\det(T) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, Te_1 \wedge Te_2 \wedge \cdots \wedge Te_n \rangle \qquad (*)$$
$$= \det(\langle e_i, Te_j \rangle)_{i,j=1,\cdots,n}$$

を示せ.

(v)　任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ に対して,

$$\det(1 + A) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Tr}\left(\overset{p}{\wedge}(A)\right)$$

を証明せよ.

ヒント　$(*)$ と

$$\mathrm{Tr}\left(\overset{p}{\wedge}(T)\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \langle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, Te_{i_1} \wedge \cdots \wedge Te_{i_p} \rangle$$

に注意し, $\{e_j\}_{j=1}^n$ として, A の固有ベクトル系をとり, $T = 1 + A$ として計算せよ.

第 6 章

ボソン-フェルミオンフォック空間

ボソンフォック空間とフェルミオンフォック空間のテンソル積として定義されるヒルベルト空間 — ボソン-フェルミオンフォック空間 — に関する解析の基礎的な側面を論述する．このヒルベルト空間では新しい対象に出会う．すなわち，無限次元の Dirac 型作用素である．ボソン-フェルミオンフォック空間の理論は，量子物理学への応用においては，超対称的場の量子論に対する数学的枠組みを提供する．

6-1 節　ボソン-フェルミオンフォック空間の基本的構造

$\mathscr{H}, \mathscr{K}$ を可分なヒルベルト空間とし，$\mathscr{H}$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ と $\mathscr{K}$ 上のフェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ のテンソル積ヒルベルト空間

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) := \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K}) \tag{6.1}$$

を考える．これをヒルベルト空間の対 $(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ に付随する**ボソン-フェルミオンフォック空間**という．

ボソン-フェルミオンフォック空間は，ボソンフォック空間とフェルミオンフォック空間を統合する 1 つの普遍的空間である．実際，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ に対して，$U_{\mathrm{b}}\Psi := \Psi \otimes \Omega_{\mathscr{K}}$ を定義すれば，U_{b} は，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ から $\mathscr{F}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ の閉部分空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \otimes (\mathscr{L}\{\Omega_{\mathscr{K}}\})$ へのユニタリ作用素であり，この意味で，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \otimes (\mathscr{L}\{\Omega_{\mathscr{K}}\})$ はボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ と同一視される．同様に，$(\mathscr{L}\{\Omega_{\mathscr{H}}\}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ はフェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{H})$ と同一視される．

ボソンフォック空間あるいはフェルミオンフォック空間の拡大としてのボソン-フェルミオンフォック空間には，ボソンフォック空間やフェルミオンフォック空間における

のとは異なる，新しい型の線形作用素が“棲息”していることが期待される．これらの線形作用素たちを見いだし，その本質を解明したい．数理物理学の観点からは，これに加えて，そうした線形作用素たちがいかなる物理現象を現出させる役割を担っているかという考察へと導かれる．

ボソン-フェルミオンフォック空間上の解析学の構築への第一歩として，まず，ボソン-フェルミオンフォック空間の基本的な構造をとらえておく．

補題 6-1　$\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}_n$ $(n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ をヒルベルト空間，$\mathscr{Y} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{Y}_n$ とする．このとき，ユニタリ変換 $U : \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y} \longrightarrow \mathscr{Z} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}_n$ ですべての $\psi \in \mathscr{X}$, $\phi = \{\phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{Y}$ に対して，

$$U(\psi \otimes \phi) = \{\psi \otimes \phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \tag{6.2}$$

をみたすものがただ 1 つ存在する．

証明　$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathscr{X}$ の CONS とすれば，$\mathscr{D}_0 := \mathscr{L}\{e_k \otimes \phi_k \mid \phi_k \in \mathscr{Y}, k \in \mathbb{N}\}$ は $\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$ で稠密である．任意の $\Psi \in \mathscr{D}_0$ は $\Psi = \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \otimes \phi_k$ という形に書ける $(a_k \in \mathbb{C}$, $\phi_k = \{\phi_k^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{Y}$, $N \in \mathbb{N})$．そこで，写像 $U : \mathscr{D}_0 \hat{\otimes} \mathscr{Y} \longrightarrow \mathscr{Z}$ を

$$U(\Psi) := \left\{ \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \otimes \phi_k^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

によって定義する．直接計算により，

$$\|U(\Psi)\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \otimes \phi_k^{(n)} \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \| \phi_k^{(n)} \|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \|\phi_k\|^2 = \|\Psi\|^2.$$

したがって，U は等長作用素である．一方，$\hat{\bigoplus}_{n=0}^{\infty} \left(\mathscr{L}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \hat{\otimes} \mathscr{Y}_n \right)$ (代数的無限直和) は $\mathscr{Z}$ で稠密である．したがって，U の値域 $\mathrm{Ran}\,(U)$ は $\mathscr{Z}$ で稠密である．ゆえに，U は $\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$ から $\mathscr{Z}$ へのユニタリ作用素に一意的に拡大される．この拡大も U と書くことにする．このとき，(6.2) が成立することは容易に確かめられる．U の一意性は，$\mathscr{X} \hat{\otimes} \mathscr{Y}$ の稠密性と稠密に定義された有界線形作用素の拡大定理の一意性による．　□

以後，補題 6-1 における同型対応の意味で，

$$\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}_n$$

と記す．

閉部分空間

$$\vee^n(\mathscr{H}, \mathscr{K}) := (\bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K}), \tag{6.3}$$

$$\bigwedge^{p}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) := \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \otimes \bigwedge^{p}(\mathscr{K}), \tag{6.4}$$

を導入する．補題 6-1 の応用により，

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \vee^n(\mathscr{H}, \mathscr{K}), \tag{6.5}$$

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^{p}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) \tag{6.6}$$

が成立する．

さらに，

$$\bigwedge^{p}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\left(\bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H} \right) \otimes \bigwedge^{p}(\mathscr{K}) \right] \tag{6.7}$$

に注意すれば，

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\left(\bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H} \right) \otimes \bigwedge^{p}(\mathscr{K}) \right]. \tag{6.8}$$

そこで，

$$\mathscr{F}_r(\mathscr{H}, \mathscr{K}) := \bigoplus_{n+p=r} \left[\left(\bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathscr{H} \right) \otimes \bigwedge^{p}(\mathscr{K}) \right] \tag{6.9}$$

を導入すれば，

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathscr{F}_r(\mathscr{H}, \mathscr{K}) \tag{6.10}$$

である．

直和分解 (6.5), (6.6), (6.10) の意味を考えよう．ボソンフォック空間の個数作用素を N_{b}，フェルミオンフォック空間のそれを N_{f} とすれば，これらは，ボソン-フェルミオンフォック空間では，それぞれ，$N_{\mathrm{b}} \otimes I$, $I \otimes N_{\mathrm{f}}$ として働く．任意のベクトル $\Psi \in \vee^n(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ に対して，$N_{\mathrm{b}} \otimes I\Psi = n\Psi$．したがって，$\vee^n(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ は $N_{\mathrm{b}} \otimes I$ の固有値 n に属する固有空間である．つまり，直和分解 (6.5) は，ボソン-フェルミオンフォック空間上におけるボソン的個数作用素 $N_{\mathrm{b}} \otimes I$ の固有空間による直和分解なのである．

同様に，$\bigwedge^{p}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ はフェルミオン的個数作用素 $I \otimes N_{\mathrm{f}}$ の固有値 p に属する固有空間であり，直和分解 (6.6) はこの固有空間による直和分解である．

ボソン的個数作用素 $N_{\rm b}\otimes I$ とフェルミオン的個数作用素 $I\otimes N_{\rm f}$ の和

$$N_{\rm tot}:=N_{\rm b}\otimes I+I\otimes N_{\rm f} \tag{6.11}$$

は自己共役であり，非負である (系 2-27 を応用)．これをボソン-フェルミオンフォック空間上の**全個数作用素** (total number operator) とよぶ．容易にわかるように，任意の $r\geq 0$ に対して，$\mathscr{F}_r(\mathscr{H},\mathscr{K})$ は $N_{\rm tot}$ の固有値 r に属する固有空間である．したがって，直和分解 (6.10) は，全個数作用素の固有空間による直和分解である．

6-2 節　双対境界作用素と境界作用素

S を $\mathscr{H}$ 上から $\mathscr{K}$ への稠密に定義された閉作用素とすれば，von Neumann の定理 (付録 C の定理 C-2) によって，S^*S, SS^* はそれぞれ，$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ 上の非負自己共役作用素である．したがって，$C^\infty(S^*S)$ と $C^\infty(SS^*)$ はそれぞれ，$\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ で稠密である (補題 4-32 (ii))．ゆえに，$\mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ の部分空間

$$\mathscr{D}_S^\infty:=\mathscr{F}_{\rm b,fin}(C^\infty(S^*S))\hat{\otimes}\wedge_{\rm fin}(C^\infty(SS^*)) \tag{6.12}$$

((4.19), (5.17) を参照) は稠密である．$D(S^*)$ は稠密であるから，$\mathscr{K}$ の CONS $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ で $D(S^*)$ に含まれるものが存在する ($\dim\mathscr{K}=\infty$ の場合を考える)．各 $N\in\mathbb{N}$ に対して，$\mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ 上の作用素

$$d_S^{(N)}:=\sum_{n=1}^N A(S^*\xi_n)\otimes B(\xi_n)^* \tag{6.13}$$

を考える．ここで，$A(f)$ ($f\in\mathscr{H}$) はボソン消滅作用素であり，$B(g)^*$ ($g\in\mathscr{K}$) はフェルミオン生成作用素である．作用素 $d_S^{(N)}$ の $N\longrightarrow\infty$ のときの収束性を調べる．

ベクトル $f_j\in C^\infty(S^*S)$, $g_k\in C^\infty(SS^*)$ ($j=1,\cdots,q$, $k=1,\cdots,r$) に対して，$\mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ のベクトル

$$\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}:=A(f_1)^*\cdots A(f_q)^*\Omega_{\mathscr{H}}\otimes B(g_1)^*\cdots B(g_r)^*\Omega_{\mathscr{K}} \tag{6.14}$$

を導入する．明らかに，$\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}\in\mathscr{D}_S^\infty$ であり，

$$\begin{aligned}
&d_S^{(N)}\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}\\
&=\sum_{j=1}^q A(f_1)^*\cdots\widehat{A(f_j)^*}\cdots A(f_q)^*\Omega_{\mathscr{H}}\otimes B(f_j^{(N)})^*B(g_1)^*\cdots B(g_r)^*\Omega_{\mathscr{K}}\\
&=\sum_{j=1}^q (I\otimes B(f_j^{(N)})^*)\Psi_{f_1,\cdots,f_{j-1},f_{j+1},\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}.
\end{aligned}$$

ただし，$f_j^{(N)} := \sum_{n=1}^{N} \langle \xi_n, Sf_j \rangle \xi_n$．ベクトルの集合 $\{\xi_n\}_n$ は CONS であるから，$f_j^{(N)} \longrightarrow Sf_j$ $(N \longrightarrow \infty)$．したがって，

$$\lim_{N\to\infty} d_S^{(N)} \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}$$
$$= \sum_{j=1}^{q} (I \otimes B(Sf_j)^*) \Psi_{f_1,\cdots,f_{j-1},f_{j+1},\cdots,f_q,;g_1,\cdots,g_r}. \tag{6.15}$$

ゆえに，$d_S^{(N)}$ は $\mathscr{D}_S^\infty$ 上で，$N \longrightarrow \infty$ のとき，強収束する．そこで，$\mathscr{D}_S^\infty$ を定義域とする線形作用素 d_S を

$$d_S \Psi := \lim_{N\to\infty} d_S^{(N)} \Psi = \sum_{n=1}^{\infty} A(S^* \xi_n) \otimes B(\xi_n)^* \Psi, \quad \Psi \in \mathscr{D}_S^\infty, \tag{6.16}$$

によって定義する．(6.15) によって，

$$d_S \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}$$
$$= \sum_{j=1}^{q} (I \otimes B(Sf_j)^*) \Psi_{f_1,\cdots,f_{j-1},f_{j+1},\cdots,f_q,;g_1,\cdots,g_r}$$
$$= \sum_{j=1}^{q} A(f_1)^* \cdots A(\hat{f}_j)^* \cdots A(f_q)^* \Omega_{\mathscr{H}} \otimes B(Sf_j)^* B(g_1)^* \cdots B(g_r)^* \Omega_{\mathscr{K}} \tag{6.17}$$

であるから，d_S は，CONS $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ の選び方によらない．なお，$\dim \mathscr{K} < \infty$ のときは，$\{\xi_n\}_{n=1}^{\dim \mathscr{K}}$ を $\mathscr{K}$ の CONS として

$$d_S := \sum_{n=1}^{\dim \mathscr{K}} A(S^* \xi_n) \otimes B(\xi_n)^*$$

と定義する．

作用素 d_S の基本的性質を調べよう．

命題 6-2

(i) d_S は $\mathscr{D}_S^\infty$ を不変にする．

(ii) $\mathscr{D}_S^\infty$ 上で

$$d_S^2 = 0 \tag{6.18}$$

が成り立つ．

(iii) d_S は可閉作用素である．

証明　(i) これは，(6.17) と $f_j \in C^\infty(S^*S)$ ならば $Sf_j \in C^\infty(SS^*)$ からしたがう．

(ii) (6.14) のベクトル $\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}$ に対して，(6.17) により，

$$d_S^2\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}$$

$$= \sum_{j\neq k}^{q}\sum_{j=1}^{q} A(f_1)^*\cdots\widehat{A(f_k)^*}\cdots\widehat{A(f_j)^*}\cdots A(f_q)^*\Omega_{\mathscr{H}}$$

$$\otimes B(Sf_k)^*B(Sf_j)^*B(g_1)^*\cdots B(g_r)^*\Omega_{\mathscr{K}}. \tag{6.19}$$

$B(\cdot)^*$ どうしの反交換関係により，右辺は，

$$-\sum_{k=1,j\neq k}^{q}\sum_{j=1}^{q} A(f_1)^*\cdots\widehat{A(f_k)^*}\cdots\widehat{A(f_j)^*}\cdots A(f_q)^*\Omega_{\mathscr{H}}$$

$$\otimes B(Sf_j)^*B(Sf_k)^*B(g_1)^*\cdots B(g_r)^*\Omega_{\mathscr{K}}$$

に等しい．$A(\cdot)^*$ どうしの可換性により，和の添字 j, k を入れ換えても，この式は不変であり，その結果は，(6.19) により，$-d_S^2\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}$ である．したがって，$2d_S^2\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}=0$．ゆえに，(6.18) がしたがう．

(iii) d_S の共役作用素を計算する．まず，任意の $\Phi \in \mathscr{D}_S^\infty$ は $D(d_S^{(N)*})$ の元であって，

$$d_S^{(N)*}\Phi = \sum_{n=1}^{N} A(S^*\xi_n)^*\otimes B(\xi_n)\Phi \tag{6.20}$$

となることに注意する．より具体的には，正準反交換関係により，

$$d_S^{(N)*}\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}$$

$$= \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}A(\tilde{g}_k^{(N)})^*A(f_1)^*\cdots A(f_q)^*\Omega_{\mathscr{H}}\otimes B(g_1)^*\cdots\widehat{B(g_k)^*}\cdots B(g_r)^*\Omega_{\mathscr{K}}$$

$$= \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}(A(\tilde{g}_k^{(N)})^*\otimes I)\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_{k-1},g_{k+1},\cdots,g_r}.$$

ただし，$\tilde{g}_k^{(N)} := S^*\left(\sum_{n=1}^{N}\langle\xi_n, g_k\rangle\xi_n\right)$．任意の $f\in D(S)$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\langle f, \tilde{g}_k^{(N)}\rangle = \langle Sf, g_k\rangle = \langle f, S^*g_k\rangle \tag{6.21}$$

が成立する．任意の $\Psi_{f'_1,\cdots,f'_{q+1};g'_1,\cdots,g'_{r-1}}$ $(f'_j \in C^\infty(S^*S),\ g_k\in C^\infty(SS^*))$ に対して，

$$\langle (A(\tilde{g}_k^{(N)})^*\otimes I)\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_{k-1},g_{k+1},\cdots,g_r}, \Psi_{f'_1,\cdots,f'_{q+1};g'_1,\cdots,g'_{r-1}}\rangle$$

$$= \langle A(\tilde{g}_k^{(N)})^* A(f_1)^* \cdots A(f_q)^* \Omega_{\mathscr{H}}, A(f_1')^* \cdots A(f_{q+1}')^* \Omega_{\mathscr{H}} \rangle$$
$$\times \langle B(g_1)^* \cdots \widehat{B(g_k)^*} \cdots B(g_r)^* \Omega_{\mathscr{K}}, B(g_1')^* \cdots B(g_{r-1}')^* \Omega_{\mathscr{K}} \rangle$$

であるから，この右辺には，$\langle \tilde{g}_k^{(N)}, f_j' \rangle$ という量が現れる．これは，(6.21) によって，$\langle S^* g_k, f_j' \rangle$ に収束する．したがって，

$$\lim_{N\to\infty} \langle (A(\tilde{g}_k^{(N)})^* \otimes I) \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_{k-1},g_{k+1},\cdots,g_r}, \Psi_{f_1',\cdots,f_{q+1}';g_1',\cdots,g_{r-1}'} \rangle$$
$$= \left\langle (A(S^* g_k)^* \otimes I) \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_{k-1},g_{k+1},\cdots,g_r}, \Psi_{f_1',\cdots,f_{q+1}';g_1',\cdots,g_{r-1}'} \right\rangle$$

が成立する．したがって，任意の $\Phi \in \mathscr{D}_S^\infty$ に対して，

$$\langle \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}, d_S \Phi \rangle$$
$$= \lim_{N\to\infty} \langle d_S^{(N)*} \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}, \Phi \rangle$$
$$= \left\langle \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} (A(S^* g_k)^* \otimes I) \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_{k-1},g_{k+1},\cdots,g_r}, \Phi \right\rangle.$$

この最初と最後の式を比べると，$\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r} \in D(d_S^*)$ かつ

$$d_S^* \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_r}$$
$$= \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} (A(S^* g_k)^* \otimes I) \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_{k-1},g_{k+1},\cdots,g_r} \tag{6.22}$$

が結論される．したがって，

$$\mathscr{D}_S^\infty \subset D(d_S^*). \tag{6.23}$$

これは，$D(d_S^*)$ が稠密であることを意味する．ゆえに，d_S は可閉である． □

命題 6-3 $D(\bar{d}_S)$ 上で

$$\bar{d}_S^2 = 0$$

が成り立つ ($\bar{d}_S$ は d_S の閉包)．

証明 任意の $\Psi \in D(\bar{d}_S)$ に対して，$\Psi_n \longrightarrow \Psi$, $d_S \Psi_n \longrightarrow \bar{d}_S \Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる $\Psi_n \in \mathscr{D}_S^\infty$ が存在する．(6.18) によって，$d_S(d_S \Psi_n) = 0$．したがって，自明的に，$d_S(d_S \Psi_n) \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$．したがって，$d_S$ の可閉性により，$\bar{d}_S \Psi \in D(\bar{d}_S)$ かつ $\bar{d}_S(\bar{d}_S \Psi) = 0$． □

以後，d_S の閉包 $\bar{d}_S$ も同じ記号 d_S で表す (したがって，以下に現れる d_S は閉作用

素であり，$D(d_S)$ 上で，$d_S^2=0$ が成り立つ).

d_S の定義から，各 $p\geq 0$ に対して，d_S は $D(d_S)\cap\overset{p}{\wedge}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ を $\overset{p+1}{\wedge}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ の中へうつす．そこで，$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ から $\overset{p+1}{\wedge}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ への作用素 $d_{S,p}$ が

$$D(d_{S,p}):=D(d_S)\cap\overset{p}{\wedge}(\mathscr{H},\mathscr{K}), \tag{6.24a}$$

$$d_{S,p}\Psi=(d_S\Psi)^{(p+1)},\quad \Psi\in D(d_{S,p}), \tag{6.24b}$$

によって定義される．

$\mathscr{K}$ の部分空間 $\mathscr{D}$ に対して，

$$\overset{p}{\wedge}_{\mathrm{fin}}:=\wedge_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})\cap\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K}),\quad p\geq 0, \tag{6.25}$$

を導入する．

$$\mathscr{D}_{S,p}^{\infty}:=\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(C^{\infty}(S^*S))\hat{\otimes}\overset{p}{\wedge}_{\mathrm{fin}}(C^{\infty}(SS^*)) \tag{6.26}$$

とすれば，

$$\mathscr{D}_{S,p}^{\infty}\subset D(d_{S,p}) \tag{6.27}$$

であるから，$d_{S,p}$ は稠密に定義されている．さらに，$d_{S,p}$ は閉作用素であり，命題 6-3 によって，

$$d_{S,p+1}d_{S,p}=0,\quad p\geq 0, \tag{6.28}$$

が $D(d_{S,p})$ 上で成り立つ．これらの事実は，ホモロジー代数的な意味で，$\left(\bigoplus_{p=0}^{\infty}D(d_{S,p}),\ d_S\right)$ が**双対鎖複体** (cochain complex) をなすことを示している．そこで，作用素 d_S をボソン-フェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ 上の**双対境界作用素** (coboundary operator) とよぶ．

$$\cdots\xrightarrow{d_{S,p-1}}D(d_{S,p})\xrightarrow{d_{S,p}}D(d_{S,p+1})\xrightarrow{d_{S,p+1}}D(d_{S,p+2})\xrightarrow{d_{S,p+2}}\cdots.$$

$d_{S,p}$ は $\mathscr{D}_{S,p}^{\infty}$ を $\mathscr{D}_{S,p+1}^{\infty}$ の中へうつすこと，すなわち

$$d_{S,p}\mathscr{D}_{S,p}^{\infty}\subset\mathscr{D}_{S,p+1}^{\infty} \tag{6.29}$$

にも注意しよう．

d_S の共役作用素 d_S^* については，次の命題が成り立つ．

命題 6-4

(i)　d_S^* は $\mathscr{D}_S^\infty$ を不変にする．

(ii)　$D(d_S^*)$ 上で

$$d_S^{*\,2} = 0$$

が成り立つ．

(iii)　任意の $p \geq 0$ に対して，d_S^* は $D(d_S^*) \cap \overset{p}{\wedge}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ を $\overset{p-1}{\wedge}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ の中へうつし，

$$(d_S^* \Psi)^{(p-1)} = d_{S,p-1}^* \Psi^{(p)}, \quad \Psi \in D(d_S^*), \tag{6.30}$$

が成り立つ．ただし，$\overset{-1}{\wedge}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) := \{0\}$ とする．

(iv)　すべての $p \geq 0$ に対して，$D(d_{S,p}^*)$ 上で

$$d_{S,p-1}^* d_{S,p}^* = 0.$$

(v)　$d_{S,p}^* \mathscr{D}_{S,p+1}^\infty \subset \mathscr{D}_{S,p}^\infty$ $(p \geq 0)$.

証明　(i) (6.22) による．

(ii) 補題 6-3 によって，任意の $\Psi \in D(d_S)$ と $\Phi \in D(d_S^*)$ に対して，$\langle d_S^* \Phi, d_S \Psi \rangle = 0$．これは，$d_S^* \Phi \in D(d_S^*)$ かつ $d_S^*(d_S^* \Phi) = 0$ を意味する．したがって，求める結果を得る．

(iii) $\Psi \in D(d_S^*) \cap \overset{p}{\wedge}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ とすれば，任意の $\Phi \in D(d_S)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle \Phi, d_S^* \Psi \rangle &= \langle d_S \Phi, \Psi \rangle = \langle (d_S \Phi)^{(p)}, \Psi^{(p)} \rangle \\ &= \langle d_{S,p-1} \Phi^{(p-1)}, \Psi^{(p)} \rangle.\end{aligned}$$

したがって，$\Phi^{(p-1)} = 0$ ならば，$\langle \Phi, d_S^* \Psi \rangle = 0$ であるから，$d_S^* \Psi \in \overset{p-1}{\wedge}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ である．上の式で，Ψ を $D(d_S^*)$ の任意の元，$\Phi^{(p-1)} = \Xi \in D(d_{S,p-1})$, $\Phi^{(q)} = 0$ $(q \neq p-1)$ とすれば，$\langle \Xi, (d_S^* \Psi)^{(p-1)} \rangle = \langle d_{S,p-1} \Xi, \Psi^{(p)} \rangle$．$\Xi$ は $D(d_{S,p-1})$ の任意の元であるから，これは，$\Psi^{(p)} \in D(d_{S,p-1}^*)$ かつ $d_{S,p-1}^* \Psi^{(p)} = (d_S^* \Psi)^{(p-1)}$ を意味する．したがって，(6.30) が成立する．

(iv) (i) と (ii)(または (6.28)) からしたがう．

(v) (6.30) と (i) による．　□

命題 6-4 は，$\left(\bigoplus_{p=0}^{\infty} D(d_{S,p}^*), d_S^* \right)$ が**鎖複体** (chain complex) をなし，d_S^* は**境界作用素** (boundary operator) の役割を演じることを示している．

$$\cdots \xrightarrow{d^*_{S,p+1}} D(d^*_{S,p}) \xrightarrow{d^*_{S,p}} D(d^*_{S,p-1}) \xrightarrow{d^*_{S,p-1}} D(d^*_{S,p-2}) \xrightarrow{d^*_{S,p-2}} \cdots.$$

6-3 節　Laplace-Beltrami 作用素

有限次元多様体上の解析とのアナロジーに基づいて，双対鎖複体 $\left(\hat{\bigoplus}_{p=0}^{\infty} D(d_{S,p}), d_S\right)$ に対して，$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ 上の作用素

$$\Delta_{S,p} := d^*_{S,p} d_{S,p} + d_{S,p-1} d^*_{S,p-1}, \quad p \geq 0, \tag{6.31}$$

を考えるのは自然である $(D(\Delta_{S,p}) := D(d^*_{S,p} d_{S,p}) \cap D(d_{S,p-1} d^*_{S,p-1}))$．ただし，$d_{S,-1} := 0$ とする．この作用素を，双対鎖複体 $\left(\hat{\bigoplus}_{p=0}^{\infty} D(d_{S,p}), d_S\right)$ に同伴する p 次の **Laplace-Beltrami (ラプラス–ベルトラミ) 作用素**とよぶ．この作用素の性質を調べる．

補題 6-5　A, B をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ からヒルベルト空間 $\mathscr{Y}$ への閉作用素とする．定数 a, $b \geq 0$ が存在して，

$$\|A\psi\| + \|B\psi\| \leq a\|(A+B)\psi\| + b\|\psi\|, \quad \psi \in D(A) \cap D(B), \tag{6.32}$$

が成立するとする．このとき，$A + B$ $(D(A+B) := D(A) \cap D(B))$ は閉作用素である．

証明　$\psi_n \in D(A) \cap D(B)$, $\psi_n \longrightarrow \psi \in \mathscr{X}$, $(A+B)\psi_n \longrightarrow \phi \in \mathscr{Y}$ $(n \longrightarrow \infty)$ としよう．このとき，(6.32) によって，$\{A\psi_n\}_n$, $\{B\psi_n\}_n$ はともに $\mathscr{Y}$ のコーシー列である．したがって，$\eta_1 = \lim_{n\to\infty} A\psi_n \in \mathscr{Y}$, $\eta_2 = \lim_{n\to\infty} B\psi_n \in \mathscr{Y}$ が存在する．A, B は閉であるから，$\psi \in D(A) \cap D(B)$ かつ $A\psi = \eta_1$, $B\psi = \eta_2$ である．したがって，$\phi = \eta_1 + \eta_2 = (A+B)\psi$．ゆえに，$A + B$ は閉である．□

注意 6-1　条件 (6.32) は，実は，$A + B$ が閉であるための必要条件でもある．証明の概略は次の通り．一般に，T が $\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ への閉作用素ならば，$D(T)$ は，内積

$$\langle \psi, \phi \rangle_T := \langle T\psi, T\phi \rangle_{\mathscr{Y}} + \langle \psi, \phi \rangle_{\mathscr{X}}, \quad \psi, \phi \in D(T),$$

に関して，ヒルベルト空間になる．このヒルベルト空間を $\mathscr{H}_T$ とする．さて，$A + B$ は閉であるとしよう．写像 $J : \mathscr{H}_{A+B} \longrightarrow \mathscr{H}_A$ を $J\psi = \psi$ $(\psi \in \mathscr{H}_{A+B})$ によって定義する ($\mathscr{H}_{A+B}$ の，$\mathscr{H}_A$ の中への埋め込み写像)．このとき，J は閉作用素である

ことは容易にわかる．定義域がヒルベルト空間全体である閉作用素は有界であるから(閉グラフ定理)[1)]，定数 $C \geq 0$ があって，$\|\psi\|_{\mathscr{H}_A} = \|J\psi\|_{\mathscr{H}_A} \leq C\|\psi\|_{\mathscr{H}_{A+B}}$ $(\psi \in \mathscr{H}_{A+B})$，が成立する．これは，$\sqrt{\|A\psi\|^2 + \|\psi\|^2} \leq C\sqrt{\|(A+B)\psi\|^2 + \|\psi\|^2}$ を意味する．したがって，$\|A\psi\| \leq C(\|(A+B)\psi\| + \|\psi\|)$．同様に，定数 $C' \geq 0$ があって，$\|B\psi\| \leq C'(\|(A+B)\psi\| + \|\psi\|)$ $(\psi \in D(A+B))$．これらの不等式から (6.32) が得られる．

補題 6-6　A, B をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ からヒルベルト空間 $\mathscr{Y}$ への稠密に定義された閉作用素で，$D(B)$ 上で $A^*B = 0$ が成り立つとする．このとき，

$$\|(A+B)\psi\|^2 = \|A\psi\|^2 + \|B\psi\|^2, \quad \psi \in D(A) \cap D(B), \tag{6.33}$$

が成り立ち，$A+B$ は閉である．

証明　任意の $\psi \in D(A+B)$ に対して，

$$\|(A+B)\psi\|^2 = \|A\psi\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle A\psi, B\psi\rangle + \|B\psi\|^2.$$

仮定により，$\langle A\psi, B\psi\rangle = \langle \psi, A^*B\psi\rangle = 0$．したがって，(6.33) が得られる．(6.33) と補題 6-5 により，$A+B$ は閉である．□

補題 6-7　すべての $p \geq 0$ に対して，$\Delta_{S,p}$ は閉対称作用素である．また，任意の $\Psi \in D(\Delta_{S,p})$ に対して，

$$\|\Delta_{S,p}\Psi\|^2 = \|d^*_{S,p}d_{S,p}\Psi\|^2 + \|d_{S,p-1}d^*_{S,p-1}\Psi\|^2 \tag{6.34}$$

が成り立つ．

証明　$p \geq 1$ とする．$A = d^*_{S,p}d_{S,p}$, $B = d_{S,p-1}d^*_{S,p-1}$ とおくと，von Neumann の定理 (付録 C の定理 C-2) により，A, B は非負自己共役作用素である．したがって，特に，それらは閉である．(6.28) によって，$D(B)$ 上で $A^*B = 0$．これと補題 6-6 によって，$\Delta_{S,p}$ の閉性がでる．(6.34) は，いまの場合に (6.33) を適用すればよい．(6.29) と命題 6-4 (v) によって，

$$\mathscr{D}^\infty_{S,p} \subset D(d^*_{S,p}d_{S,p}) \cap D(d_{S,p-1}d^*_{S,p-1}). \tag{6.35}$$

したがって，$D(\Delta_{S,p})$ は稠密である．$\Delta_{S,p}$ のエルミート性は容易にわかる．したがって，$\Delta_{S,p}$ は対称作用素である．□

---

1) 新井-江沢 (1999a) の p. 110，定理 2.15.

定理 6-8　すべての $p \geq 0$ に対して，作用素の等式

$$\Delta_{S,p} = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S) \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(SS^*) \tag{6.36}$$

が成り立つ．ただし，

$$d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(SS^*) := d\Gamma_{\mathrm{f}}(SS^*) \upharpoonright \left[\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K}) \cap D(d\Gamma_{\mathrm{f}}(T)) \right]$$

は $d\Gamma_{\mathrm{f}}(SS^*)$ の $\overset{p}{\wedge}(\mathscr{K})$ における部分である ((5.25) を参照).

証明　(6.14) の型のベクトル $\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p} \in \mathscr{D}_{S,p}^{\infty}$ に対して，(6.17) と (6.22) により，

$$\begin{aligned}
&d_{S,p}^* d_{S,p} \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p} \\
&= \sum_{j=1}^{q} (A(S^*Sf_j) \otimes I) \Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} A(S^*g_k)^* \otimes B(Sf_j)^* \Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,\hat{g}_k,\cdots,g_p}
\end{aligned}$$

(右辺第 2 項のマイナスの符号に注意)．同様に，

$$\begin{aligned}
&d_{S,p-1} d_{S,p-1}^* \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p} \\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} (I \otimes B(SS^*g_k)^*) \Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,\hat{g}_k,\cdots,g_p} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} A(S^*g_k)^* \otimes B(Sf_j)^* \Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,\hat{g}_k,\cdots,g_p}.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&\Delta_{S,p} \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p} \\
&= \sum_{j=1}^{q} (A(S^*Sf_j) \otimes I) \Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} (I \otimes B(SS^*g_k)^*) \Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,\hat{g}_k,\cdots,g_p}.
\end{aligned}$$

一方，$A(\cdot)^*$ どうしの可換性により，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{q} (A(S^*Sf_j)^* \otimes I) \Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p} &= \sum_{j=1}^{q} \Psi_{f_1,\cdots,S^*Sf_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p} \\
&= [d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S) \otimes I] \Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p}.
\end{aligned}$$

また，$B(\cdot)^*$ どうしの反可換性を用いると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}(I\otimes B(SS^*g_k)^*)\Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,\hat{g}_k,\cdots,g_p}\\
&=\sum_{k=1}^{p}\Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,SS^*g_k,\cdots,g_p}\\
&=[I\otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}]\Psi_{f_1,\cdots,\hat{f}_j,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p}.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\Delta_{S,p}\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p}=[d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S)\otimes I+I\otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}]\Psi_{f_1,\cdots,f_q;g_1,\cdots,g_p}.
$$

これは，(6.36) が $\mathscr{D}_{S,p}^{\infty}$ 上で成立することを意味する．すなわち，

$$
[d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S)\otimes I+I\otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(SS^*)]\restriction\mathscr{D}_{S,p}^{\infty}\subset\Delta_{S,p}
$$

が示されたことになる．一方，補題 4-32 (iii) によって，$C^\infty(S^*S)$ は S^*S の芯であり，$C^\infty(SS^*)$ は SS^* の芯である．したがって，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(C^\infty(S^*S))$ は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S)$ の芯であり，$\wedge_{\mathrm{fin}}^{p}(C^\infty(SS^*))$ は $d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(S^*S)$ の芯である．よって，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S)\otimes I+I\otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(SS^*)$ は $\mathscr{D}_{S,p}^{\infty}$ 上で本質的に自己共役である (系 2-27 の応用)．この事実と $d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S)\otimes I+I\otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(SS^*)$ は非負自己共役作用素であること (系 2-27 の応用) を用いると，

$$
\overline{[d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S)\otimes I+I\otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(SS^*)]\restriction\mathscr{D}_{S,p}^{\infty}}=d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S)\otimes I+I\otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(SS^*).
$$

したがって，

$$
d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S)\otimes I+I\otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(SS^*)\subset\overline{\Delta_{S,p}}.
$$

補題 6-7 によって，$\overline{\Delta_{S,p}}=\Delta_{S,p}$．これと，自己共役作用素が非自明な対称拡大をもたないこと[2)]を使えば，作用素の等式としての (6.36) が得られる． □

定理 6-8 は，S^*S に対応する，ボソンフォック空間の第 2 量子化作用素と SS^* に対応する，フェルミオンフォック空間の第 2 量子化作用素の p 粒子空間部分の和が双対鎖複体 $\left(\bigoplus_{p=0}^{\infty}D(d_{S,p}),d_S\right)$ に同伴する p 次の Laplace-Beltrami 作用素として特徴づけられることを示している．これは，特殊な形の第 2 量子化作用素が幾何的あるいはトポロジカルな意味においても，重要性をもちうることを示唆するものであり，興味深い．

作用素 d_S からつくられる作用素

---

2) 新井 (1997a) の命題 2.27.

$$\Delta_S := d_S^* d_S + d_S d_S^* \tag{6.37}$$

を双対鎖複体 $\left(\overset{\infty}{\underset{p=0}{\oplus}} D(d_{S,p}), d_S\right)$ に同伴する**全 Laplace-Beltrami 作用素**とよぶ.

定理 6-9　作用素の等式

$$\Delta_S = \overset{\infty}{\underset{p=0}{\oplus}} \Delta_{S,p} \tag{6.38}$$

が成立する. 特に, Δ_S は非負自己共役作用素である.

証明　まず,

$$D(\Delta_S) = D\left(\overset{\infty}{\underset{p=0}{\oplus}} D(\Delta_{S,p}\right) \tag{6.39}$$

を証明する. $\Psi = \{\Psi^{(p)}\}_{p=0}^\infty \in D(\Delta_S)$ としよう. したがって, $\Psi \in D(d_S^* d_S) \cap D(d_S d_S^*)$ である. $\Psi \in D(d_S^* d_S)$ は, 任意の $p \geq 0$ に対して, $\Psi^{(p)} \in D(d_{S,p}^* d_{S,p})$ かつ

$$(d_S^* d_S \Psi)^{(p)} = d_{S,p}^* (d_S \Psi)^{(p+1)} = d_{S,p}^* d_{S,p} \Psi^{(p)} \tag{6.40}$$

を意味する. 同様に, $\Psi \in D(d_S d_S^*)$ は, 任意の $p \geq 0$ に対して, $\Psi^{(p)} \in D(d_{S,p-1} d_{S,p-1}^*)$ かつ

$$(d_S d_S^* \Psi)^{(p)} = d_{S,p-1} d_{S,p-1}^* \Psi^{(p)} \tag{6.41}$$

を導く. したがって,

$$\Psi^{(p)} \in D(\Delta_{S,p}),$$

$$\sum_{p=0}^\infty \|d_{S,p}\Psi^{(p)}\|^2 < \infty, \quad \sum_{p=0}^\infty \|d_{S,p}^* d_{S,p}\Psi^{(p)}\|^2 < \infty,$$

$$\sum_{p=0}^\infty \|d_{S,p-1}^*\Psi^{(p)}\|^2 < \infty, \quad \sum_{p=0}^\infty \|d_{S,p-1} d_{S,p-1}^*\Psi^{(p)}\|^2 < \infty.$$

これから,

$$\sum_{p=0}^\infty \|(d_{S,p}^* d_{S,p} + d_{S,p-1} d_{S,p-1}^*)\Psi^{(p)}\|^2$$

$$\leq 2\left(\sum_{p=0}^\infty \|(d_{S,p}^* d_{S,p}\Psi^{(p)}\|^2 + \sum_{p=0}^\infty \|d_{S,p-1} d_{S,p-1}^*)\Psi^{(p)}\|^2\right) < \infty.$$

ゆえに $\Psi \in D\left(\overset{\infty}{\underset{p=0}{\oplus}} \Delta_{S,p}\right)$. よって, $D(\Delta_S) \subset D\left(\overset{\infty}{\underset{p=0}{\oplus}} \Delta_{S,p}\right)$.

逆に，$\Psi \in D\left(\bigoplus_{p=0}^{\infty} \Delta_{S,p}\right)$ としよう．このとき，

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|\Delta_{S,p}\Psi^{(p)}\|^2 < \infty.$$

これと (6.34) によって，

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|d_{S,p}^* d_{S,p}\Psi^{(p)}\|^2 < \infty, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \|d_{S,p-1} d_{S,p-1}^*\Psi^{(p)}\|^2 < \infty.$$

これから，

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{\infty} \|d_{S,p}\Psi^{(p)}\|^2 &= \sum_{p=0}^{\infty} \langle \Psi^{(p)}, d_{S,p}^* d_{S,p}\Psi^{(p)}\rangle \\ &\le \sum_{p=0}^{\infty} \|\Psi^{(p)}\|\|d_{S,p}^* d_{S,p}\Psi^{(p)}\| \\ &\le \left(\sum_{p=0}^{\infty} \|\Psi^{(p)}\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \|d_{S,p}^* d_{S,p}\Psi^{(p)}\|^2\right)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

同様に，

$$\sum_{p=0}^{\infty} \| d_{S,p-1}^*\Psi^{(p)} \|^2 \le \left(\sum_{p=0}^{\infty} \|\Psi^{(p)}\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \|d_{S,p-1} d_{S,p-1}^*\Psi^{(p)}\|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

したがって，$\Psi \in D(\Delta_S)$．こうして，(6.39) が成立することがわかる．

(6.40), (6.41) から，$(\Delta_S\Psi)^{(p)} = \Delta_{S,p}\Psi^{(p)}$, $\Psi \in D(\Delta_S)$．これと (6.39) は (6.38) を意味する．(6.38) の右辺の作用素は，非負自己共役作用素である (命題 3-5 (v) の応用)．したがって，Δ_S もそうである． □

注意 6-2　定理 6-9 は，各閉部分空間 $\overset{p}{\wedge}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ が Δ_S を簡約し，その簡約部分が $\Delta_{S,p}$ であることを示している．

定理 6-10　作用素の等式

$$\Delta_S = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S) \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}(SS^*)$$

が成立する．

証明　定理 6-8 によって，

$$\bigoplus_{p=0}^{\infty} \Delta_{S,p} = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S) \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{f}}(SS^*)$$

が示される．これと定理 6-9 から求める結果を得る． □

6-4 節　コホモロジー群

この節では，双対鎖複体 $\left(\hat{\bigoplus}_{p=0}^{\infty} D(d_{S,p}), d_S\right)$ に付随するコホモロジー群を考察する．そのために，まず，バナッハ空間の商空間の概念を復習しておく．

$\mathscr{X}$ をバナッハ空間，$\mathscr{M}$ を $\mathscr{X}$ の閉部分空間とする．$\mathscr{X}$ の中に，関係 $\sim$ を

$$\psi \sim \phi \Longleftrightarrow \psi - \phi \in \mathscr{M}, \quad \psi, \phi \in \mathscr{X}$$

によって定義する．この関係 $\sim$ は同値関係であることが容易に示される．この同値関係による，$\psi \in \mathscr{X}$ の同値類を $[\psi]$ と記す：$[\psi] := \{\phi \in \mathscr{X} \mid \phi \sim \psi\}$．同値類の全体

$$\mathscr{X}/\mathscr{M} := \{[\psi] \mid \psi \in \mathscr{X}\}$$

を $\mathscr{M}$ による，$\mathscr{X}$ の**商空間**という．この空間は，

$$[\psi] + [\phi] := [\psi + \phi], \quad \alpha[\psi] := [\alpha\psi], \quad \psi, \phi \in \mathscr{X}, \alpha \in \mathbb{C},$$

によって定義される和とスカラー倍に関してベクトル空間になる．さらに，

$$\|[\psi]\| := \inf\{\|\phi\| \mid \phi \in \mathscr{X}, \psi - \phi \in \mathscr{M}\}$$

とすれば，これは，$\mathscr{X}/\mathscr{M}$ のノルムであり，このノルム — **商ノルム**という — に関して，$\mathscr{X}/\mathscr{M}$ はバナッハ空間になる[3]．

さて，**双対鎖複体** $\left(\hat{\bigoplus}_{p=0}^{\infty} D(d_{S,p}), d_S\right)$ **に付随する** p **次コホモロジー群** $\mathbb{H}_S^p$ を

$$\mathbb{H}_S^0 := \ker\, d_{S,0}, \tag{6.42a}$$

$$\mathbb{H}_S^p := \ker\, d_{S,p} \Big/ \overline{\mathrm{Ran}\,(d_{S,p-1})}, \quad p \geq 1, \tag{6.42b}$$

によって定義する．$\mathbb{H}_S^0$ は，$\overset{0}{\wedge}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ の閉部分空間としてヒルベルト空間であり，$\mathbb{H}_S^p$ $(p \geq 1)$ は商ノルムに関してバナッハ空間である．これらのバナッハ空間に同型なバナッハ空間で，"より具体的" なものを見いだすことが以下の目的である．

命題 6-11　de Rham-Hodge-Kodaira 型分解．すべての $p \geq 0$ に対して，直交分解

$$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{H}, \mathscr{K}) = \overline{\mathrm{Ran}\,(d_{S,p-1})} \oplus \overline{\mathrm{Ran}\,(d_{S,p}^*)} \oplus \ker\, \Delta_{S,p} \tag{6.43}$$

が成立する．

---

[3] 以上の事実の証明については，関数解析の適当な教科書を参照されたい．たとえば，柴田 (1970) の p.125〜129.

証明 (6.28) により，$\overline{\mathrm{Ran}\,(d_{S,p-1})}$ と $\overline{\mathrm{Ran}\,(d^*_{S,p})}$ は直交する．したがって，

$$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{H},\mathscr{K}) = \overline{\mathrm{Ran}\,(d_{S,p-1})} \oplus \overline{\mathrm{Ran}\,(d^*_{S,p})} \oplus W$$

と直交分解できる．ただし，$W := \left(\overline{\mathrm{Ran}\,(d_{S,p-1})} \oplus \overline{\mathrm{Ran}\,(d^*_{S,p})}\right)^{\perp}$.

$\Psi \in W$ としよう．このとき，任意の $\Phi \in D(d_{S,p-1})$ に対して，$\langle \Psi, d_{S,p-1}\Phi\rangle = 0$．したがって，$\Psi \in D(d^*_{S,p-1})$ かつ $d^*_{S,p-1}\Psi = 0$．また，任意の $\Xi \in D(d^*_{S,p})$ に対して，$\langle \Psi, d^*_{S,p}\Xi\rangle = 0$．したがって，$\Psi \in D(d_{S,p})$ かつ $d_{S,p}\Psi = 0$．ゆえに，$\Psi \in D(\Delta_{S,p})$ かつ $\Delta_{S,p}\Psi = 0$．すなわち，$\Psi \in \ker\,\Delta_{S,p}$．よって，$W \subset \ker\,\Delta_{S,p}$.

逆に，$\Psi \in \ker\,\Delta_{S,p}$ としよう．したがって，$d^*_{S,p}d_{S,p}\Psi + d_{S,p-1}d^*_{S,p-1}\Psi = 0$．この式と Ψ との内積をとると，$\|d_{S,p}\Psi\|^2 + \|d^*_{S,p-1}\Psi\|^2 = 0$．したがって，$d_{S,p}\Psi = 0, d^*_{S,p-1}\Psi = 0$．これは，$\Psi \in \mathrm{Ran}\,(d^*_{S,p})^{\perp} \cap \mathrm{Ran}\,(d_{S,p-1})^{\perp}$ を意味する．一方，$\mathrm{Ran}\,(d^*_{S,p})^{\perp} \cap \mathrm{Ran}\,(d_{S,p-1})^{\perp} \subset W$ を見るのは容易である．したがって，$\ker\,\Delta_{S,p} \subset W$.

以上から，$W = \ker\,\Delta_{S,p}$. □

次の補題はよく知られた事実である．

補題 6-12 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ をヒルベルト空間，T を $\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ への稠密に定義された可閉作用素とする．このとき，

$$\mathscr{X} = \ker\,T \oplus \overline{\mathrm{Ran}\,(T^*)}.$$

証明 新井 (1997a) の補題 2.28 (ii) を参照. □

命題 6-13 すべての $p \geq 0$ に対して，

$$\ker\,d_{S,p} = \overline{\mathrm{Ran}\,(d_{S,p-1})} \oplus \ker\,\Delta_{S,p}. \tag{6.44}$$

証明 補題 6-12 を $T = d_{S,p}$ として応用すれば，

$$\overset{p}{\wedge}(\mathscr{H},\mathscr{K}) = \ker\,d_{S,p} \oplus \overline{\mathrm{Ran}\,(d^*_{S,p})}.$$

これと (6.43) を比較することにより，(6.44) が得られる． □

補題 6-14 $\mathscr{X}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{M}$ を $\mathscr{X}$ の閉部分空間，$\mathscr{M}$ への正射影作用素を P とする (したがって，$I - P$ は $\mathscr{M}^{\perp}$ への正射影作用素となる)．このとき，

$$V[\psi] := (I-P)\psi, \quad \psi \in \mathscr{X},$$

によって定義される写像 $V : \mathscr{X}/\mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}^\perp$ は (バナッハ空間の意味での) 同型写像である[4].

証明　V が線形であることを見るのは容易である．任意の $\phi \in \mathscr{M}^\perp$ に対して，$V[\phi] = (I-P)\phi = \phi$ であるから，V は全射である．したがって，V が等距離作用素であることを示せば証明が完了する．正射影定理により，$\mathscr{X} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$ という形に直交分解される．任意に $\psi \in \mathscr{X}$ を固定し，$\psi - \phi \in \mathscr{M}$ となる $\phi \in \mathscr{X}$ を考える．$\chi = \psi - \phi$ とおけば，$\chi \in \mathscr{M}$ であり，$\phi = \psi - \chi = P\psi - \chi + (I-P)\psi$ であるから，

$$\|\phi\|^2 = \|P\psi - \chi\|^2 + \|(I-P)\psi\|^2.$$

したがって，$\|\phi\| \geq \|(I-P)\psi\|$ であり，等号は，$P\psi = \chi$ のとき成り立つ．ゆえに，

$$\|[\psi]\| = \inf\{\|\phi\| \mid \phi \in \mathscr{X},\ \psi - \phi \in \mathscr{M}\} = \|(I-P)\psi\| = \|V[\psi]\|.$$

よって，V は等距離作用素である．　□

補題 6-14 の意味での，$\mathscr{X}/\mathscr{M}$ と $\mathscr{M}^\perp$ の同型を，$\mathscr{X}/\mathscr{M}$ と $\mathscr{M}^\perp$ の自然な同型とよび，

$$\mathscr{X}/\mathscr{M} \cong \mathscr{M}^\perp$$

と記す．

命題 6-15

$$\mathbb{H}_S^0 = \ker\, \Delta_{S,0}, \tag{6.45a}$$

$$\mathbb{H}_S^p \cong \ker\, \Delta_{S,p}, \quad p \geq 1. \tag{6.45b}$$

証明　$\ker d_{S,0} \subset \ker \Delta_{S,0}$ は明らかであろう．逆に，$\Psi \in \ker \Delta_{S,0}$ とすれば，$\|d_{S,0}\Psi\|^2 = \langle \Psi, \Delta_{S,0}\Psi \rangle = 0$. したがって，$d_{S,0}\Psi = 0$. ゆえに，$\Psi \in \ker d_{S,0}$. よって，(6.45a) が成立する．

命題 6-13 は，$\overline{\mathrm{Ran}\,(d_{S,p-1})}^\perp = \Delta_{S,p}$ を意味する．そこで，補題 6-14 を応用すれば，(6.45b) を得る．　□

---

[4] 2 つのバナッハ空間 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ が同型であるとは，$\mathscr{X}_1$ から $\mathscr{X}_2$ への等距離線形作用素 T (i.e., T は，任意の $\psi \in \mathscr{X}_1$ に対して，$\|T\psi\|_{\mathscr{X}_2} = \|\psi\|_{\mathscr{X}_1}$ をみたす線形写像) で全射であるものが存在するときをいう．

6-5 節　作用素 $\Delta_{S,p}$ の核とコホモロジー群 $\mathbb{H}_S^p$ の次元

命題 6-15 によって，コホモロジー群 $\mathbb{H}_S^p$ の解析は，ker $\Delta_{S,p}$ のそれに帰着される．この空間がいかなるものであるかを調べよう．そのために，一般的な補題をいくつか準備する．

補題 6-16　A をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の非負の自己共役作用素とすれば，

$$\ker A = \ker A^{1/2}.$$

証明　$\psi \in \ker A$ ならば，$A\psi = 0$．したがって，$0 = \langle \psi, A\psi \rangle = \|A^{1/2}\psi\|^2$．ゆえに，$A^{1/2}\psi = 0$，すなわち，$\psi \in \ker A^{1/2}$．逆に，$\psi \in \ker A^{1/2}$ とすれば，$A^{1/2}\psi = 0$．左から，$A^{1/2}$ を作用させれば，$A\psi = 0$ を得る．したがって，$\psi \in \ker A$．　□

補題 6-17　A をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の自己共役作用素とする．このとき，ker A は A を簡約し，直和分解 $\mathscr{X} = \ker A \oplus (\ker A)^\perp$ に応じて，$A = 0 \oplus A_\perp$ と分解される．ただし，$A_\perp$ は，$(\ker A)^\perp$ における，A の部分である．

証明　P を ker A への正射影作用素とする．任意の $\psi \in D(A)$ に対して，$P\psi \in \ker A$ であるから，$P\psi \in D(A)$ であり，$AP\psi = 0$ が成り立つ．また，$A\psi = A(P\psi + (I - P)\psi) = AP\psi + A(I - P)\psi = A(I - P)\psi$．任意の $\phi \in \mathscr{X}$ に対して，$\langle P\phi, A(I - P)\psi \rangle = \langle 0, (I - P)\psi \rangle = 0$．したがって，$PA(I - P)\psi = 0$．ゆえに，$PA\psi = 0$．よって，$AP\psi = PA\psi\,(= 0)$．ゆえに，$A$ は ker A によって簡約される．ker A における，A の部分が零作用素 0 であることは明らか．　□

補題 6-18　$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ をヒルベルト空間，A を $\mathscr{X}$ 上の単射な自己共役作用素とする．このとき，$\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$ 上の自己共役作用素 $A \otimes I$ (I は $\mathscr{Y}$ 上の恒等作用素) について，

$$\ker (A \otimes I) = \{0\}$$

である．

証明　$\psi \in \ker (A \otimes I)$ とする．したがって，$\|(A \otimes I)\psi\|^2 = 0$．補題 2-23 によって，$A \otimes I$ のスペクトル測度は $E_A(\cdot) \otimes I$ であるから (E_A は A のスペクトル測度)，

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \, d\|E_A(\lambda) \otimes I\psi\|^2 = 0.$$

これは，$E_A(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes I\psi = 0$ を意味する．一方，A の単射性により，$E_A(\{0\}) =$

0，したがって，$E_A(\{0\})\otimes I=0$．ゆえに，$E_A(\mathbb{R})\otimes I\psi=0$．左辺は，$\psi$ に等しいから，$\psi=0$ を得る．□

補題 6-19　$\mathscr{H}_j$ $(j=1,\cdots,n)$ をヒルベルト空間，$\mathscr{M}_j$ を $\mathscr{H}_j$ の閉部分空間とする．このとき，

$$\bigcap_{j=1}^{n}(\mathscr{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_j\otimes\cdots\otimes\mathscr{H}_n)=\bigotimes_{j=1}^{n}\mathscr{M}_j.$$

証明　$n=2$ のときのみを証明する (他の場合も同様)．明らかに，$\mathscr{M}_1\hat{\otimes}\mathscr{M}_2\subset(\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{H}_2)\cap(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{M}_2)$．したがって，閉包をとり，右辺は閉集合であることに注意すれば，$\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2\subset(\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{H}_2)\cap(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{M}_2)$ を得る．

逆に，$\psi\in(\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{H}_2)\cap(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{M}_2)$ とすれば，まず，$\psi\in\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{H}_2=(\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2)\oplus(\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2{}^\perp)$ により，$\psi=u+v$ と書ける．ただし，$u\in\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2, v\in(\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2^\perp)$．もう 1 つの条件 $\psi\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{M}_2$ により，$\psi-u\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{M}_2$ である．したがって，$\langle\psi-u,v\rangle=0$．これは，$v=0$ を意味する．ゆえに，$\psi=u\in\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2$．よって，$(\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{H}_2)\cap(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{M}_2)\subset\mathscr{M}_1\otimes\mathscr{M}_2$．□

補題 6-20　$\mathscr{H}_j$ $(j=1,\cdots,n)$ をヒルベルト空間，A_j を $\mathscr{H}_j$ 上の非負の自己共役作用素とする．$\tilde{A}_j$ を (2.42) で定義される作用素とする．このとき，

$$\ker\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{A}_j\right)=\bigotimes_{j=1}^{n}\ker A_j. \tag{6.46}$$

証明　$\psi\in\ker\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{A}_j\right)$ とする．したがって，$\sum_{j=1}^{n}\tilde{A}_j\psi=0$．この式と ψ との内積をとると，$\sum_{j=1}^{n}\langle\psi,\tilde{A}_j\psi\rangle=0$．$A_j\geq 0$ により，$\langle\psi,\tilde{A}_j\psi\rangle\geq 0$．したがって，各 $j=1,\cdots,n$ に対して，$\langle\psi,\tilde{A}_j\psi\rangle=0$ でなければならない．$\tilde{A}_j\geq 0$ であるから，これは，$\tilde{A}_j^{1/2}\psi=0$ を意味する．したがって，補題 6-16 によって，$\psi\in\ker\tilde{A}_j$．ゆえに，$\ker\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{A}_j\right)\subset\bigcap_{j=1}^{n}\ker\tilde{A}_j$．この逆の包含関係は明らかであるから，

$$\ker\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{A}_j\right)=\bigcap_{j=1}^{n}\ker\tilde{A}_j. \tag{6.47}$$

が成立する．

さて，補題 6-17 によって，直交分解 $\mathscr{H}_j=\ker A_j\oplus(\ker A_j)^\perp$ に応じて，A_j は $A_j=0\oplus(A_j)_\perp$ と直和分解される．したがって，各 $j=1,2,\cdots,n$ に対して，

$$\bigotimes_{i=1}^{n}\mathscr{H}_i \cong (\mathscr{H}_1\otimes\cdots\otimes\ker A_j\otimes\cdots\otimes\mathscr{H}_n)\oplus(\mathscr{H}_1\otimes\cdots\otimes(\ker A_j)^{\perp}\otimes\cdots\otimes\mathscr{H}_n)$$

であり，これに応じて，

$$\tilde{A}_j = 0\oplus B_j,\quad B_j := I\otimes\cdots I\otimes\underbrace{(A_j)_{\perp}}^{j\text{ 番目}}\otimes I\cdots\otimes I,$$

と分解される．したがって，

$$\ker(\tilde{A}_j) = (\mathscr{H}_1\otimes\cdots\otimes\ker A_j\otimes\cdots\otimes\mathscr{H}_n)\oplus\ker B_j.$$

$(A_j)_{\perp}$ は単射であるから，補題 6-18 により，$\ker B_j = \{0\}$．ゆえに，

$$\ker(\tilde{A}_j) = \mathscr{H}_1\otimes\cdots\otimes\ker A_j\otimes\cdots\otimes\mathscr{H}_n.$$

これと (6.47)，補題 6-19 によって (6.46) を得る． □

補題 6-21 A をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の自己共役作用素とする．$\mathscr{M}$ を $\mathscr{X}$ の閉部分空間で，A を簡約するものとする．$\mathscr{M}$ への正射影作用素を $P_{\mathscr{M}}$ とし，$\mathscr{M}$ における A の部分を $A_{\mathscr{M}}$ とする．このとき，

$$\ker A_{\mathscr{M}} = P_{\mathscr{M}}\ker A.$$

証明 $\psi\in P_{\mathscr{M}}\ker A$ とすれば，$\psi = P_{\mathscr{M}}\phi$ となる $\phi\in\ker A$ がある．A が $\mathscr{M}$ によって簡約されることにより，$\psi\in D(A)\cap\mathscr{M} = D(A_{\mathscr{M}})$ であり，$A_{\mathscr{M}}\psi = AP_{\mathscr{M}}\phi = P_{\mathscr{M}}A\phi = 0$．したがって，$\psi\in\ker A_{\mathscr{M}}$．ゆえに，$P_{\mathscr{M}}\ker A\subset\ker A_{\mathscr{M}}$．

逆に，$\psi\in\ker A_{\mathscr{M}}$ とすれば，$\psi\in D(A)\cap\mathscr{M}$ であり，$A\psi = 0$．したがって，$\psi\in\ker A$．これと $\psi\in\mathscr{M}$ により，$\psi = P_{\mathscr{M}}\psi\in P_{\mathscr{M}}\ker A$．ゆえに $\ker A_{\mathscr{M}}\subset P_{\mathscr{M}}\ker A$． □

$\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 T に対して，ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$ における第 2 量子化作用素 $d\Gamma_{\rm b}(T)$ の，n 粒子部分空間 $\bigotimes_{\rm s}^{n}\mathscr{H}$ における部分を $d\Gamma_{\rm b}^{(n)}(T)$ と記す[5]：

$$d\Gamma_{\rm b}^{(n)}(T) := d\Gamma_{\rm b}(T)_{\bigotimes_{\rm s}^{n}\mathscr{H}}. \tag{6.48}$$

以下において，ヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ の p 重反対称テンソル積 $\bigwedge^{p}(\mathscr{X})$ $(p\geq 1)$ を $\bigotimes_{\rm as}^{p}\mathscr{X}$ という記号で表す (「as」は「anti-symmetric」の意)：

$$\bigotimes_{\rm as}^{p}\mathscr{X} := \bigwedge^{p}(\mathscr{X}).$$

---

[5] 4 章では，$T_{\rm b}^{(n)}$ という記号で表した．

定理 6-22　$n, p \in \mathbb{N}$ とする．

(i)　T を $\mathscr{H}$ 上の非負の自己共役作用素とすると

$$\ker\, d\Gamma_{\mathrm{b}}^{(n)}(T) = \mathop{\otimes}_{\mathrm{s}}^{n} \ker\, T.$$

(ii)　T を $\mathscr{K}$ 上の非負の自己共役作用素とすると

$$\ker\, d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(T) = \mathop{\otimes}_{\mathrm{as}}^{p} \ker\, T.$$

証明　(i) $T^{(n)}$ を (3.17) の作用素とすれば，補題 6-20 によって，

$$\ker\, T^{(n)}(T) = \overset{n}{\otimes} \ker\, T.$$

したがって，補題 6-21 によって，$\ker\, d\Gamma_{\mathrm{b}}^{(n)}(T) = S_n\left(\overset{n}{\otimes} \ker\, T\right) = \mathop{\otimes}_{\mathrm{s}}^{n} \ker\, T$．すなわち，求める結果を得る．

(ii) (i) と同様 (S_n の所を A_p に変えればよい)．　□

補題 6-23　S は 6-2 節の閉作用素とする．このとき，

$$\ker\, S^*S = \ker\, S, \quad \ker\, SS^* = \ker\, S^*. \tag{6.49}$$

証明　$\ker\, S \subset \ker\, S^*S$ は明らか．逆に，$\psi \in \ker\, S^*S$ とすれば，

$$\|S\psi\|^2 = \langle \psi, S^*S\psi \rangle = 0.$$

したがって，$S\psi = 0$．すなわち，$\psi \in \ker\, S$．ゆえに，(6.49) の第 1 式がでる．第 2 式は，第 1 式で，S の代わりに S^* を考え，$(S^*)^* = S$ を用いればよい．　□

定理 6-24　S は 6-2 節の閉作用素とする．このとき，すべての $p \geq 0$ に対して，

$$\ker\, \Delta_{S,p} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\left(\mathop{\otimes}_{\mathrm{s}}^{n} \ker\, S\right) \otimes \left(\mathop{\otimes}_{\mathrm{as}}^{p} \ker\, S^*\right)\right]. \tag{6.50}$$

ただし，$p = 0$ の場合は，$\mathop{\otimes}_{\mathrm{as}}^{0} \ker\, S^* := \mathbb{C}$ と読む．特に，$p > \dim \ker\, S^*$ ならば，$\ker\, \Delta_{S,p} = \{0\}$．

証明　定理 6-8 と補題 6-20 によって

$$\ker\, \Delta_{S,p} = \ker\, d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S) \otimes \ker\, d\Gamma_{\mathrm{f}}^{(p)}(SS^*).$$

ここで，

$$\ker d\Gamma_{\mathrm{b}}(S^*S) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \ker d\Gamma_{\mathrm{b}}^{(n)}(S^*S)$$

に注意し，定理 6-22 を応用すれば，

$$\ker \Delta_{S,p} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \ker S^*S \right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathrm{as}}^{p} \ker SS^* \right)$$

が導かれる．そこで，補題 6-23 を使えば，(6.50) を得る．$p > \dim\ker S^*$ ならば，$\bigotimes_{\mathrm{as}}^{p} \ker S^* = \{0\}$ であるから，$\ker \Delta_{S,p} = \{0\}$ となる． □

線形作用素 T に対して，

$$\mathrm{nul}(T) := \dim\ker T \tag{6.51}$$

とおく．これは，T の**零数** (nullity) とよばれる．

系 6-25　$p \le \mathrm{nul}(S^*)$ とする．

(i)　$\mathrm{nul}(S) = 0$ ならば，$\mathrm{nul}(\Delta_{S,p}) = {}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_p$.

(ii)　$\mathrm{nul}(S) \ge 1$ ならば，$\mathrm{nul}(\Delta_{S,p}) = \infty$.

ただし，${}_{\infty}C_p = \infty$ と規約する．

証明　(6.50) から，

$$\mathrm{nul}(\Delta_{S,p}) = (\dim \bigotimes_{\mathrm{as}}^{p} \ker S^*) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dim \bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \ker S \right).$$

注意 1-6 によって，

$$\dim \bigotimes_{\mathrm{as}}^{p} \ker S^* = {}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_p, \quad \dim \bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} \ker S = {}_{\mathrm{nul}(S)+n-1}C_n.$$

ただし，${}_{n-1}C_n := 0$ と規約する．したがって，

$$\mathrm{nul}(\Delta_{S,p}) = {}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_p \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\mathrm{nul}(S)+n-1}C_n \right).$$

$\mathrm{nul}(S) = 0$ ならば，右辺は ${}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_p$ に等しいので，(i) の結果が得られる．

一方，$\mathrm{nul}(S) \ge 1$ ならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_{\mathrm{nul}(S)+n-1}C_n = \infty$$

を示すのは容易である．したがって，(ii) の結果が得られる． □

命題 6-15，定理 6-24，系 6-25 から次の結果が得られる．

系 6-26

(i)　$p > \mathrm{nul}(S^*)$ ならば，$\dim \mathbb{H}_S^p = 0$.

(ii)　$p \le \mathrm{nul}(S^*)$ かつ $\mathrm{nul}(S) \ge 1$ ならば，$\dim \mathbb{H}_S^p = \infty$.

(iii)　$p \le \mathrm{nul}(S^*)$ かつ $\mathrm{nul}(S) = 0$ ならば，$\dim \mathbb{H}_S^p = {}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_p$.

6-6 節　無限次元 Dirac 作用素

双対境界作用素 d_S から，対称作用素

$$Q_S = d_S + d_S^* \tag{6.52}$$

が定義される．これを双対境界作用素 d_S に付随する **Dirac (ディラック) 作用素**とよぶ．この作用素の自己共役性を証明するために，次の補題を用意する．

補題 6-27　A をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の対称作用素で，A^2 が自己共役となるものとする．このとき，A は自己共役である．

証明　A^2 の自己共役性と $A^2 \ge 0$ により，$\mathrm{Ran}\,(A^2+1) = \mathscr{X}$ (定理 2-10 の応用).
一方，作用素の等式

$$A^2 + 1 = (A+i)(A-i) = (A-i)(A+i)$$

が成り立つ．これから，$\mathrm{Ran}\,(A \pm i) = \mathscr{X}$ を得る．したがって，定理 2-9 の応用により，A は自己共役であることが結論される．□

定理 6-28　Dirac 作用素 Q_S は自己共役であり，作用素の等式

$$Q_S^2 = \Delta_S \tag{6.53}$$

が成り立つ．

証明　命題 6-3 と命題 6-4 (ii) によって，$D(Q_S^2) = D(d_S^* d_S) \cap D(d_S d_S^*) = D(\Delta_S)$ であり，(6.53) が成り立つことがわかる．定理 6-9 により，補題 6-27 を応用することができ，Q_S の自己共役性が導かれる．□

定理 6-28 と定理 6-10 により，次の結果が得られる．

系 6-29　作用素の等式

$$Q_S^2 = d\Gamma_{\rm b}(S^*S) \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\rm f}(SS^*)$$

が成り立つ．

ボソン-フェルオミンフォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ は直和分解

$$\mathscr{F}(\mathscr{H},\mathscr{K}) = \wedge_+(\mathscr{H},\mathscr{K}) \oplus \wedge_-(\mathscr{H},\mathscr{K}) \tag{6.54}$$

をもつ．ただし，

$$\wedge_+(\mathscr{H},\mathscr{K}) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^{2p}(\mathscr{H},\mathscr{K}), \quad \wedge_-(\mathscr{H},\mathscr{K}) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^{2p+1}(\mathscr{H},\mathscr{K}). \tag{6.55}$$

閉部分空間 $\wedge_\pm(\mathscr{H},\mathscr{K})$ への正射影作用素を $P_\pm$ とし

$$\Gamma := P_+ - P_- \tag{6.56}$$

とおく．これは有界な自己共役作用素であり，

$$\Gamma^2 = I \tag{6.57}$$

をみたす．したがって，Γ は自己共役なユニタリ作用素である．

定理 6-30

(i) 作用素 Γ は $D(Q_S)$ を不変にし，$D(Q_S)$ 上で，反交換関係

$$\Gamma Q_S + Q_S \Gamma = 0$$

が成り立つ．

(ii) Q_S は Δ_S の任意の芯上で本質的に自己共役である．特に，Q_S は，$\mathscr{D}_S^\infty$ 上で本質的に自己共役である．

証明 (i) $\Psi \in D(Q_S)$ $(= D(d_S) \cap D(d_S^*))$ とする．

$$(\Gamma\Psi)^{(p)} = \mathrm{sgn}(p)\Psi^{(p)}, \quad p \ge 0.$$

ただし，$\mathrm{sgn}(2p) := 1$，$\mathrm{sgn}(2p+1) := -1$．したがって，$\Gamma\Psi \in D(Q_S)$，

$$(d_S\Gamma\Psi)^{(p)} = \mathrm{sgn}(p-1)d_{S,p-1}\Psi^{(p-1)}, \quad (d_S^*\Gamma\Psi)^{(p)} = \mathrm{sgn}(p+1)d_{S,p}^*\Psi^{(p+1)},$$

であり，

$$\mathrm{sgn}(p-1) = \mathrm{sgn}(p+1) = -\mathrm{sgn}(p)$$

であるから，

$$(Q_S\Gamma\Psi)^{(p)} = -\mathrm{sgn}(p)(d_{S,p-1}\Psi^{(p-1)} + d_{S,p}^*\Psi^{(p+1)}) = -(\Gamma Q_S\Psi)^{(p)}.$$

したがって，題意にいう反交換関係が成立する．

(ii) 補題 2-24 の応用によって，D が $\Delta_S = Q_S^2$ の芯であれば，それは Q_S の芯である．定理 6-10 によって，$\mathscr{D}_S^\infty$ は Δ_S の芯である．□

系 6-31　Q_S のスペクトルおよび点スペクトルは原点に関して対称である．すなわち，$\lambda \in \sigma(Q_S)$ $(\sigma_{\mathrm{p}}(Q_S))$ ならば，$-\lambda \in \sigma(Q_S)$ $(\sigma_{\mathrm{p}}(Q_S))$.

証明　定理 6-30 (i) と (6.57) によって，作用素の等式

$$\Gamma Q_S \Gamma^{-1} = -Q_S$$

が成り立つ．これは，Q_S と $-Q_S$ がユニタリ同値であることを示している．したがって，$\sigma(Q_S) = \sigma(-Q_S)$．これから，スペクトルに関する主張がしたがう．$\sigma_{\mathrm{p}}(Q_S)$ についても同様.□

6-7 節　抽象的 Dirac 作用素

この節では，ボソン-フェルミオンフォック空間の理論の構造を，より高次の観点からとらえるために，ボソン–フェルミオンフォック空間に具現されている，もっと普遍的な構造を明らかにする．

6-7-1　$\mathbb{Z}_2$ 階数づけられたヒルベルト空間と抽象的 Dirac 作用素

$\mathfrak{H}$ をヒルベルト空間とする．

$\mathfrak{H}$ が，2 つの直交する閉部分空間 $\mathfrak{H}_\pm \neq \{0\}$ の直和であるとき，すなわち，

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_- \tag{6.58}$$

が成立するならば，$\mathfrak{H}$ は $\mathbb{Z}_2$ **階数づけられている**という[6)]．この場合，$\mathfrak{H}_+$ の元を**偶元** (even element)，$\mathfrak{H}_-$ の元を**奇元** (odd element) とよぶ．$\mathfrak{H}$ 上の線形作用素 τ が，すべての $\psi_\pm \in \mathfrak{H}_\pm$ に対して，$\tau\psi_\pm = \pm\psi_\pm$ をみたすとき，τ を，$\mathbb{Z}_2$ 階数づけ (6.58) の**階数作用素** (grading operator) とよぶ．このような作用素はただ 1 つしかない．実際，$\mathfrak{H}_\pm$ 上への正射影作用素を $P_{\mathfrak{H}_\pm}$ とすれば，

$$\tau = P_{\mathfrak{H}_+} - P_{\mathfrak{H}_-}$$

---

6) $\mathbb{Z}_2$ は位数 2 の巡回群を表す．

である．τ は有界な自己共役作用素であり，$\tau^2 = I$ をみたす．したがって，τ は自己共役なユニタリ作用素である．

一般に，$\mathfrak{H}$ 上の有界線形作用素 T が $T^2 = I$ をみたすとき，T は $\mathfrak{H}$ 上の**対合**(たいごう) (involution) とよばれる．

次のことは，対合の定義からただちにわかる：(i) 対合は全単射である，(ii) 対合がユニタリであれば，それは自己共役である．

ユニタリな対合を**ユニタリ対合** (unitary involution) とよぶ．

上記の階数作用素 τ はユニタリ対合である．

恒等作用素 I および $-I$ はユニタリ対合であるが，これらは自明なユニタリ対合である．そこで，$\pm I$ とは異るユニタリ対合を**非自明なユニタリ対合**という．

補題 6-32 τ を $\mathfrak{H}$ 上の任意の非自明なユニタリ対合とする．このとき，τ を階数作用素とする，$\mathfrak{H}$ の $\mathbb{Z}_2$ 階数づけ (6.58) が存在する．

証明 上に注意したように，τ がユニタリ対合であれば，それは自己共役である．ユニタリ作用素のスペクトルは $\mathbb{C}$ の単位円周に含まれ，自己共役作用素のスペクトルは実数の閉部分集合であるから，$\sigma(\tau) \subset \{-1, 1\}$ がわかる．いま，仮定によって，$\tau \neq \pm I$ であるから，$\sigma(\tau) = \{-1, 1\}$ でなければならない．したがって，± 1 は τ の固有値であり，$E_\tau(\{-1\}) + E_\tau(\{1\}) = I$ (E_τ は τ のスペクトル測度)．これらの固有値に属する，τ の固有空間を $\mathfrak{H}_\pm$ $(= \mathrm{Ran}\,(E_\tau(\{\pm 1\})) \neq \{0\})$ とすれば，(6.58) が成立する． □

以上から，ヒルベルト空間の $\mathbb{Z}_2$ 階数づけと非自明なユニタリ対合が 1 対 1 に対応することが示された．

定義 6-33 τ をヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上の対合とし，Q を $\mathfrak{H}$ 上の対称作用素とする．もし，$\tau D(Q) \subset D(Q)$ であり，$D(Q)$ 上で反交換関係

$$\tau Q + Q\tau = 0$$

が成り立つならば，Q を対合 τ に関する**抽象的 Dirac 作用素**という．抽象的 Dirac 作用素の具体的な実現 (ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ が特定されている場合) を **Dirac 型作用素**という．

この定義は，有限次元空間上の解析に現れる種々の Dirac 型作用素の構造を抽象化して得られるものである．

有限自由度の量子力学に現れる Dirac 型作用素の例を見ておこう．

例 6-1　$\mathbb{R}$ 上の，$\mathbb{C}^2$ 値の L^2 関数からつくられるヒルベルト空間

$$L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \;\middle|\; \psi, \phi \in L^2(\mathbb{R}) \right\} = L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R}) \tag{6.59}$$

を考えよう．2 行 2 列の行列

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.60}$$

は **Pauli (パウリ) 行列**とよばれる．これらは，エルミート行列であり，直接計算により，次の関係式をみたすことがわかる．

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2, \tag{6.61a}$$

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{jk}, \quad j,k = 1,2,3. \tag{6.61b}$$

$L^2(\mathbb{R})$ 上の任意の線形作用素 A は，直和 $A \oplus A$ として，$L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 上の線形作用素に拡大される (3 章，注意 3-3 を参照)：

$$D(A \oplus A) := D(A) \oplus D(A), \quad (A \oplus A)(\psi, \phi) := (A\psi, A\phi), \quad (\psi, \phi) \in D(A \oplus A).$$

だが，表記を簡略にするために，$A \oplus A$ も単に A で表す[7]．各 i, $j = 1, 2$ に対して，M_{ij} を $L^2(\mathbb{R})$ 上の線形作用素とし，これを行列成分とする作用素行列 $M = (M_{ij})_{i,j=1,2}$ を次のように定義する[8]：

$$D(M) := [D(M_{11}) \cap D(M_{21})] \oplus [D(M_{12}) \cap D(M_{22})], \tag{6.62a}$$

$$M \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} M_{11}\psi + M_{12}\phi \\ M_{21}\psi + M_{22}\phi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \in D(M). \tag{6.62b}$$

いま述べた意味で，各 σ_j は $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 上の線形作用素とみなすことができ，有界な自己共役作用素である．

(6.61b) で $j = k$ の場合を考えると，各 σ_j は $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 上の非自明なユニタリ対合である．特に σ_3 の固有値 $+1$ に属する固有空間は

---

[7] A をどのヒルベルト空間で考えているかを明確に意識していれば混乱のおそれはない．

[8] 作用素を行列成分とする行列によって定義される作用素を**作用素行列** (operator matrix) という．

$$L^2_+(\mathbb{R};\mathbb{C}^2) := \left\{ \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \psi \in L^2(\mathbb{R}) \right\} \tag{6.63}$$

であり，σ_3 の固有値 -1 に属する固有空間は

$$L^2_-(\mathbb{R};\mathbb{C}^2) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} \middle| \psi \in L^2(\mathbb{R}) \right\} \tag{6.64}$$

である．明らかに

$$L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2) = L^2_+(\mathbb{R};\mathbb{C}^2) \oplus L^2_-(\mathbb{R};\mathbb{C}^2). \tag{6.65}$$

これは，非自明なユニタリ対合 σ_3 を階数作用素とする，$L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ の $\mathbb{Z}_2$ 階数づけをあたえる．

D_x を $L^2(\mathbb{R})$ 上の一般化された微分作用素[9]，V を $\mathbb{R}$ 上の実数値ボレル可測関数で $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ に属するものとする[10]．関数 V によるかけ算作用素も同じ記号 V で表す．これらの作用素から，$L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 上の作用素 D_V を

$$D_V := \sigma_2(-iD_x) + \sigma_1 V = \begin{pmatrix} 0 & -D_x + V \\ D_x + V & 0 \end{pmatrix} \tag{6.66}$$

によって定義する．次の事実は容易に証明される：

(i) $C_0^\infty(\mathbb{R}) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset D(D_V)$ であり，D_V は対称作用素である．

さらに，

(ii) $\sigma_3 D(D_V) \subset D(D_V)$ かつ $D(D_V)$ 上で

$$\sigma_3 D_V + D_V \sigma_3 = 0 \tag{6.67}$$

が成り立つ．

実際, $\Theta = (\psi, \phi) \in D(D_V) = [D(D_x) \cap D(V)] \oplus [D(D_x) \cap D(V)]$ とすれば, ψ, $\phi \in D(D_x) \cap D(V)$ であり,

$$\sigma_3 \Theta = \begin{pmatrix} \psi \\ -\phi \end{pmatrix}$$

であるから，$\sigma_3 \Theta \in D(D_V)$ である．(6.67) は，σ_3 と σ_1, σ_2 の反可換性を使えば容

---

[9] $D_x := \overline{d/dx \restriction C_0^\infty(\mathbb{R})}$ ($L^2(\mathbb{R})$ における作用素として)．新井 (1997a) の p.146 を参照.

[10] $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $R > 0$ に対して，$\displaystyle\int_{|x| \le R} |f(x)|^2 dx < \infty$．前掲書の p.191 を参照.

易にわかる．

上の (i), (ii) により，D_V は Dirac 型作用素である．

例 6-2　$d \geq 1$ とし，α_j $(j = 0, 1, \cdots d)$ を s 次のエルミート行列で $(s \geq 2)$，反交換関係

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk}, \quad j, k = 0, 1, \cdots, d, \tag{6.68}$$

をみたすものとする．このような行列の組 $\{\alpha_j\}_{j=0}^d$ は $d+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{d+1}$ に同伴する **Clifford (クリフォード) 代数の表現**とよばれる．s と d の関係は次であたえられる[11)]：

$$s = \begin{cases} 2^{(d+1)/2} & (d \text{ が奇数のとき}) \\ 2^{(d+2)/2} & (d \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$$

＊＊＊＊＊

具体的な例　(i) パウリ行列のひと組 $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ は，$d = 1, s = 2$ の場合の例である．

(ii) $d = 3$ の場合，パウリ行列を用いて，4 行 4 列のエルミート行列

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.69}$$

をつくることができるが，これらは，(6.68) をみたす．

＊＊＊＊＊

ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^s) = \overset{s}{\oplus} L^2(\mathbb{R}^d)$ を考える．$L^2(\mathbb{R}^d)$ の任意の線形作用素 A は，s 個の直和作用素 $\overset{s}{\oplus} A$ として (3 章，注意 3-3 を参照)，$L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^s)$ 上の線形作用素に拡大される．例 6-1 の場合と同様，$\overset{s}{\oplus} A$ も単に A で表す．

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形作用素 M_{ab} $(a, b = 1, \cdots, s)$ に対して，$L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^s)$ において働く，s 次の作用素行列 $M = (M_{ab})_{a,b=1}^s$ を

$$D(M) := \overset{s}{\underset{a=1}{\oplus}} \left[\bigcap_{b=1}^{s} D(M_{ab}) \right], \tag{6.70a}$$

$$M\psi := (\phi_a)_{a=1}^s, \quad \phi_a := \sum_{b=1}^{s} M_{ab}\psi_b, \quad \psi \in D(M), \tag{6.70b}$$

によって定義する．$\mathbb{R}^d$ の点を $x = (x_1, \cdots, x_d)$ のように表し，変数 x_j に関する一般化された偏微分作用素を D_j と記す[12)]．V を $\mathbb{R}^d$ 上の実数値関数で，$V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$

[11)] Gilbert and Murray(1991) の p.22, Theorem 3.2 を参照．

[12)] 新井 (1997a) の p.146 を参照．

であるとする．α_j, D_j, V からつくられる作用素

$$\not{D}_V := \sum_{j=1}^{d} \alpha_j(-i)D_j + \alpha_0 V \tag{6.71}$$

を考えよう．α_j $(j = 0, \cdots, d)$ は定数行列であるから，$D(\not{D}_V) = \bigcap_{j=1}^{d}[D(D_j) \cap D(V)]$ である．したがって，

$$D(\not{D}_V) \supset \oplus^{s} C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$$

であるから，$D(\not{D}_V)$ は稠密である．$\not{D}_V$ のエルミート性は容易にわかる．したがって，$\not{D}_V$ は対称作用素である．

さて，

$$\tau_d := i^{d(d-1)/2}\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_d \tag{6.72}$$

としよう．(6.68) を用いることにより，

$$\tau_d^* = \tau_d, \quad \tau_d^2 = I$$

が示される．すなわち，τ はユニタリ対合である．

d **が奇数の場合**を考える．このとき，(6.68) は

$$\{\tau_d, \alpha_j\} = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, d, \tag{6.73}$$

を導く．これから，$\tau_d \neq \pm I$ がわかる (もし，$\tau_d = \pm I$ ならば，$\alpha_j = 0$ となるが，これは矛盾である)．τ_d は定数行列であり，$\|\tau_d\| = 1$ であるので，任意の $\psi \in D(D_j) \cap D(V)$ に対して，$\tau_d\psi \in D(D_j) \cap D(V)$．したがって，$\tau_d D(\not{D}_V) \subset D(\not{D}_V)$．さらに (6.73) により，$D(\not{D}_V)$ 上で，

$$\tau_d \not{D}_V + \not{D}_V \tau_d = 0 \tag{6.74}$$

が成り立つことがわかる．よって，$\not{D}_V$ は Dirac 型作用素である．

V が定数 m に等しいときは，$\not{D}_m$ は自己共役であり，作用素の等式

$$\not{D}_m^2 = -\Delta + m^2 \tag{6.75}$$

が成り立つ．ただし，$\Delta := \sum_{j=1}^{d} D_j^2$ は d 次元の一般化されたラプラシアンである．

具体例：$d = 3$, $s = 4$，$V = m$ (非負の定数) の場合の $\not{D}_V$，すなわち，

$$\not{D}_m := \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(-i)D_j + \alpha_0 m \tag{6.76}$$

は，質量 m の**自由な Dirac 作用素** (free Dirac operator) あるいは**自由な Dirac ハミルトニアン**とよばれる．これは，量子力学の文脈では，質量が m で，電荷をもち，スピンが 1/2 の相対論的な自由粒子 — **Dirac 粒子**とよばれる (たとえば，電子，陽子) — を記述するハミルトニアンである．

例 6-3　前節で導入した作用素 Γ はボソン-フェルミオンフォック空間上の非自明なユニタリ対合である ((6.56), (6.57) を参照)．この事実と定理 6-30 (i) によって，Q_S は Dirac 型作用素である．

6-7-2　フレドホルム作用素

$\mathbb{Z}_2$ 階数づけられたヒルベルト空間上の自己共役な抽象的 Dirac 作用素には，指数とよばれる，ある種の不変量が定義されることを示す準備として，ここで，一般的な概念をいくつか定義する．$\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ をヒルベルト空間，T をヒルベルト空間 $\mathscr{X}_1$ から $\mathscr{X}_2$ への稠密に定義された閉作用素とする．

定義 6-34　$\mathrm{nul}(T) := \dim\ker T$, $\mathrm{nul}(T^*) := \dim\ker T^*$ の少なくとも 1 つが有限ならば，

$$\mathrm{ind}(T) := \mathrm{nul}(T) - \mathrm{nul}(T^*) \in \mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\} \tag{6.77}$$

が定義される．これを T の**解析的指数** (analytical index) あるいは単に**指数**とよぶ．

注意 6-3　容易にわかるように，$\mathscr{X}_1 = \mathscr{X}_2$ の場合に，T が自己共役で $\mathrm{nul}(T) < \infty$ ならば，$\mathrm{ind}(T) = 0$ である．

T は閉であるから，$T^{**} = T$ である．したがって，

$$\mathrm{ind}(T^*) = -\mathrm{ind}(T) \tag{6.78}$$

が成り立つ．

指数 $\mathrm{ind}(T)$ が有限の場合は，それは整数であるから，$\mathscr{X}_1$ から $\mathscr{X}_2$ への稠密に定義された閉作用素の族 $\{T(t)\}_{t\in[0,1]}$ で $T(0) = T$ かつ対応 $t \longrightarrow T(t)$ が何らかの位相で連続であるようなものを考えると — すなわち，$\{T(t)\}_{t\in[0,1]}$ は T の "連続変形" (continuous deformation) —，$\mathrm{ind}(T(t)) = \mathrm{ind}(T)$ $(t \in [0,1])$ となる場合がありうることが期待される．つまり，$\mathrm{ind}(T)$ は，T のある種の変形の仕方に対する不変量であることが予想されるわけである．$T(t) = T + S(t)$ $(S(t) := T(t) - T)$ と書けば，$T(t)$ は，線形作用素に関する摂動論の意味で，T に対する，$S(t)$ による摂動から得ら

れる作用素であると見ることができる[13].

この問題に関する基本的結果を述べるために，閉作用素の特別なクラスを導入する．

定義 6-35

(i) $\mathrm{Ran}\,(T)$ が閉で，$\mathrm{nul}(T) < \infty, \mathrm{nul}(T^*) < \infty$ ならば，T は**フレドホルム** (Fredholm) であるという[14].

(ii) $\mathrm{Ran}\,(T)$ が閉で，$\mathrm{nul}(T), \mathrm{nul}(T^*)$ の少なくとも 1 つが有限のとき，T は**半フレドホルム** (semi-Fredholm) であるという．

定義から明らかなように，T がフレドホルムならば，それは半フレドホルムである．

定義 6-36 S を $\mathscr{X}_1$ から $\mathscr{X}_2$ への線形作用素で，$D(T) \subset D(S)$ をみたすものとする．$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, $\{T\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であるような任意の列 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{S\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する部分列を含むとき，S は T に**関して相対的にコンパクト**であるという．あるいは単に S は **T-コンパクト**であるという．

次の定理は (半) フレドホルム作用素に関する基本的事実である．

定理 6-37 T を $\mathscr{X}_1$ から $\mathscr{X}_2$ への稠密に定義された閉作用素とする．

(i) T が (半) フレドホルムならば T^* も (半) フレドホルムである．

(ii) T は (半) フレドホルムであるとし，S を $\mathscr{X}_1$ から $\mathscr{X}_2$ への T-コンパクトな線形作用素とする．このとき，$T + S$ は (半) フレドホルムであり，$\mathrm{ind}(T + S) = \mathrm{ind}(T)$ が成り立つ．

この定理を証明するには，かなりの準備を要するので，ここではその証明は割愛する．証明に興味のある読者は，たとえば，Kato (1976) の p.234，Corollary 5.14 ; p.238, Theorem 5.26 を参照されたい[15]．しかし，本書を理解するには，さしあたり，この定理を認めて先に進んでいただければよい．

---

[13] 一般に，$\mathscr{X}_1$ から $\mathscr{X}_2$ への，2 つの線形作用素 A, B について，A を基準として，作用素 $A + B$ を考えるとき，作用素 B を A に対する**摂動** (perturbation) といい，作用素 $A + B$ は，この摂動によって，A から得られるという言い方をする．A のどのような特性が $A + B$ においても保持され続けるか (あるいはそうでないか) を解析するのが，**線形作用素の摂動論**の基本的主題である．A のある特性 (たとえば，閉性，自己共役性，スペクトルの性質) が $A + B$ においても保持され続ける場合，この特性は，摂動 B のもとで**安定である** (stable) という．線形作用素の摂動論については，記念碑的大著 Kato (1976) がある．

[14] スウェーデンの数学者 E. I. Fredholm (1866〜1927) にちなむ．

[15] 安定性に関する他の定理についても同書およびそこに引用されている文献を参照．

6-7-3　抽象的 Dirac 作用素の指数

$\mathfrak{H}$ をはじめのヒルベルト空間とし，τ を $\mathfrak{H}$ 上の非自明なユニタリ対合，Q を τ に関する抽象的 Dirac 作用素とする．直和分解 (6.58) に応じて，$\mathfrak{H}$ を

$$\mathfrak{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \;\middle|\; \psi \in \mathfrak{H}_+, \phi \in \mathfrak{H}_- \right\} \tag{6.79}$$

のように表す．この表示に応じて，M_{ab} $(a, b = \pm)$ を $\mathfrak{H}_b$ から $\mathfrak{H}_a$ への線形作用素とするとき，$\mathfrak{H}$ 上の作用素行列 $M = (M_{ab})_{a,b=\pm}$ が

$$D(M) := [D(M_{++}) \cap D(M_{-+})] \oplus [D(M_{+-}) \cap D(M_{--})], \tag{6.80a}$$

$$M := \begin{pmatrix} M_{++} & M_{+-} \\ M_{-+} & M_{--} \end{pmatrix}, \tag{6.80b}$$

によって定義される．

$\mathfrak{H}$ 上の任意の線形作用素は，(6.80a), (6.80b) の形の作用素行列で表される (付録 C を参照)．

対合 τ を作用素行列で表せば

$$\tau = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{6.81}$$

となる．

補題 6-38　$\mathfrak{H}_\pm$ から $\mathfrak{H}_\mp$ への稠密に定義された線形作用素 $Q_\pm$ で

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_- \\ Q_+ & 0 \end{pmatrix} \tag{6.82}$$

となるものが一意的に存在する．さらに，Q が閉ならば，$Q_\pm$ も閉である．

証明　付録 C により，

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{++} & Q_{+-} \\ Q_{-+} & Q_{--} \end{pmatrix}$$

という形に一意的に表される．ここで，Q_{ab} は $\mathfrak{H}_b$ から $\mathfrak{H}_a$ への線形作用素である．したがって，$D(Q)$ 上で，

$$\tau Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{++} & Q_{+-} \\ Q_{-+} & Q_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{++} & Q_{+-} \\ -Q_{-+} & -Q_{--} \end{pmatrix}$$

と計算される[16)]．同様に，$D(Q)$ 上で，

$$Q\tau = \begin{pmatrix} Q_{++} & -Q_{+-} \\ Q_{-+} & -Q_{--} \end{pmatrix}.$$

これらの事実と τ と Q の ($D(Q)$ 上での) 反可換性により，$Q_{++} = 0, Q_{--} = 0$ が導かれる．したがって，$Q_+ := Q_{-+}, Q_- := Q_{+-}$ とおけば，(6.82) を得る．Q の閉性から，$Q_\pm$ の閉性を導くのは容易である． □

補題 6-38 の作用素 $Q_\pm$ を Q の $\mathfrak{H}_\pm$ **における部分**とよぶ．

補題 6-39 Q が自己共役ならば，Q_+ は閉作用素であり，

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_+^* \\ Q_+ & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

証明 Q は自己共役であるから，付録 C の定理 C-4 によって，Q_+ は閉であり，$Q_+^* = Q_-$ である．したがって，題意が成立する． □

定義 6-40 Q は自己共役であるとし，Q の $\mathfrak{H}_+$ における部分 Q_+ に関して，$\mathrm{nul}(Q_+)$, $\mathrm{nul}(Q_+^*)$ の少なくとも 1 つは有限であるとする．このとき，**抽象的 Dirac 作用素 Q の指数** $\mathrm{ind}_\tau(Q)$ を

$$\mathrm{ind}_\tau(Q) := \mathrm{ind}(Q_+) = \mathrm{nul}(Q_+) - \mathrm{nul}(Q_+^*)$$

によって定義する．

注意 6-4 $\mathrm{ind}_\tau(Q)$ は $\mathrm{ind}(Q)$ と異なる．注意 6-3 で述べたように，Q が自己共役で，条件 $\mathrm{nul}(Q) < \infty$ をみたすならば，$\mathrm{ind}(Q) = 0$ であるが，$\mathrm{ind}_\tau(Q)$ は 0 とは限らない．

摂動のもとでの指数の安定性を考察する観点からは，Q_+ の (半) フレドホルム性を調べることが重要である．これを Q の言葉で定式化する必要がある．

[16)] 作用素行列の積の計算は，成分の積が意味をもつ定義域上では，数の行列の場合と同様の規則にしたがう．これは，定義 (6.80a), (6.80b) を用いて，容易に確かめられる．

補題 6-41　$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ をヒルベルト空間，T を $\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ への閉線形作用素とする．$\mathrm{Ran}\,(T)$ が閉であるための必要十分条件は，定数 $C>0$ が存在して，

$$\|T\psi\| \geq C\|\psi\|, \quad \psi \in (\ker\,T)^{\perp} \cap D(T), \tag{6.83}$$

が成り立つことである．

証明　(i) (必要性) $\mathrm{Ran}\,(T)$ は閉であるとする．このとき，$\mathrm{Ran}\,(T)$ は，$\mathscr{Y}$ の内積でヒルベルト空間である．任意の $\phi \in \mathrm{Ran}\,(T)$ に対して，$T\psi = \phi$ となる $\psi \in D(T)$ がある．T の閉性により，$\ker\,T$ は閉部分空間であるから，$\psi = \psi_0 + \psi_0^{\perp}$ と直交分解できる．ただし，$\psi_0 \in \ker\,T$, $\psi_0^{\perp} \in (\ker\,T)^{\perp}$．したがって，$\psi_0^{\perp} \in D(T) \cap (\ker\,T)^{\perp}$ であり，$\phi = T\psi_0^{\perp}$．いま，$T' := T\restriction[(\ker\,T)^{\perp} \cap D(T)]$ とおくと，T' は $D(T) \cap (\ker\,T)^{\perp}$ から $\mathrm{Ran}\,(T)$ への全単射であり，$T'^{-1}\phi = \psi_0^{\perp}$．したがって，$T'^{-1}$ は $\mathrm{Ran}\,(T)$ から $(\ker\,T)^{\perp} \cap D(T)$ への全単射な線形作用素である．T'^{-1} の閉性を示すために，$\phi_n \in \mathrm{Ran}\,(T)$, $\phi_n \longrightarrow \phi \in \mathrm{Ran}\,(T)$, $T'^{-1}\phi_n \longrightarrow \psi \in \mathscr{X}$ $(n \longrightarrow \infty)$ としよう．$\psi_n = T'^{-1}\phi_n$ とおけば，$\psi_n \in D(T) \cap (\ker\,T)^{\perp}$ であり，$T'\psi_n = T\psi_n = \phi_n$．$T$ は閉であるから，$\psi \in D(T)$ かつ $T\psi = \phi$．任意の $\eta \in \ker\,T$ に対して，$\langle \eta, T'^{-1}\phi_n \rangle = 0$ であるから，$\langle \eta, \psi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \eta, T'^{-1}\phi_n \rangle = 0$．したがって，$\psi \in (\ker\,T)^{\perp}$．ゆえに，$\psi = T'^{-1}\phi$．よって，$T'^{-1}$ は閉である．そこで閉グラフ定理を応用すれば，T'^{-1} は有界でなければならない．すなわち，定数 $K>0$ が存在して，$\|T'^{-1}\phi\| \leq K\|\phi\|$ $(\phi \in \mathrm{Ran}\,(T))$ が成り立つ．任意の $\psi \in D(T) \cap (\ker\,T)^{\perp}$ に対して，$\psi = T'^{-1}\phi$ となる $\phi \in \mathrm{Ran}\,(T)$ があるから，$\|\psi\| \leq K\|T'\psi\| = K\|T\psi\|$ を得る．$C = K^{-1}$ として，(6.83) が導かれる．

(十分性) (6.83) が成り立つとし，$\{\phi_n\}_n \subset \mathrm{Ran}\,(T)$, $\phi_n \longrightarrow \phi$ $(n \longrightarrow \infty)$ としよう．このとき，$T\psi_n = \phi_n$ となる $\psi_n \in D(T) \cap (\ker\,T)^{\perp}$ がとれる (上の証明のはじめを参照)．すると，(6.83) により，$\{\psi_n\}_n$ は $\mathscr{X}$ におけるコーシー列になることがわかる．したがって，$\psi := \lim_{n\to\infty} \psi_n$ が存在する．T の閉性により，$\psi \in D(T)$ かつ $T\psi = \phi$ が結論される．したがって，$\phi \in \mathrm{Ran}\,(T)$ であるから，$\mathrm{Ran}\,(T)$ は閉である．　□

補題 6-42　Q が (半) フレドホルムならば，$Q_{\pm}$ は (半) フレドホルムである．

証明　容易にわかるように，

$$\ker\,Q = \ker\,Q_{+} \oplus \ker\,Q_{-}, \quad \ker\,Q^{*} = \ker\,Q_{-}^{*} \oplus \ker\,Q_{+}^{*}.$$

したがって，「$\mathrm{nul}(Q) < \infty$, $\mathrm{nul}(Q^{*}) < \infty$」と「$\mathrm{nul}(Q_{\pm}) < \infty$, $\mathrm{nul}(Q_{\pm}^{*}) < \infty$」は

同値である．直接計算により，

$$\|Q\psi\|^2 = \|Q_+\psi_+\|^2 + \|Q_-\psi_-\|^2, \quad \psi = (\psi_+, \psi_-) \in D(Q). \tag{6.84}$$

さて，Q はフレドホルムであるとしよう．このとき，上に述べたように，$\mathrm{nul}(Q_\pm) < \infty$, $\mathrm{nul}(Q_\pm^*) < \infty$．$\mathrm{Ran}\,(Q)$ の閉性と補題 6-41 により，定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|Q\psi\| \geq C\|\psi\|, \quad \psi \in (\ker\, Q)^\perp \cap D(Q),$$

が成り立つ．これと (6.84) から，

$$\|Q_\pm\psi_\pm\| \geq C\|\psi_\pm\|, \quad \psi_\pm \in D(Q_\pm) \cap (\ker\, Q_\pm)^\perp,$$

が導かれる．これは，再び，補題 6-41 により，$\mathrm{Ran}\,(Q_\pm)$ が閉であることを意味する．したがって，$Q_\pm$ はフレドホルムである．半フレドホルム性についても同様． □

補題 6-43 V を $\mathfrak{H}$ 上の (τ に関する) 抽象的 Dirac 作用素で，V は Q-コンパクトであるとする．このとき，V_+ は Q_+-コンパクトである．

証明 $\{\psi_n\} \subset D(Q_+)$ を有界列とし，$\{Q_+\psi_n\}_n$ も有界であるとする．$\Theta_n := (\psi_n, 0)$ とすれば，$\Theta_n \in D(Q)$ であり，$\{\Theta_n\}_n$, $\{Q\Theta_n\}_n = \{(0, Q_+\psi_n)\}_n$ は有界である．したがって，$\{V\Theta_n\}_n$ は収束する部分列を含む．一方，$V\Theta_n = (0, V_+\psi_n)$ であるから，$\{V_+\psi_n\}_n$ は収束する部分列を含むことになる．したがって，V_+ は Q_+-コンパクトである． □

補題 6-44 A をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の自己共役作用素，B を $\mathscr{X}$ 上の対称作用素で A-コンパクトなものとする．このとき，$A + B$ は自己共役である．

証明 Reed and Simon (1978) の p.113，Corollary 2 を参照． □

以上の準備により，自己共役な抽象的 Dirac 作用素の (半) フレドホルム性と指数に関する，次の安定性定理を証明することができる．

定理 6-45 Q は自己共役かつ半フレドホルムであるとする．V を $\mathfrak{H}$ 上の (τ に関する) 抽象的 Dirac 作用素で，Q-コンパクトであるとする．このとき，$Q + V$ は，自己共役な半フレドホルム作用素であり，

$$\mathrm{ind}_\tau(Q + V) = \mathrm{ind}_\tau(Q)$$

が成り立つ．

証明　補題 6-44 と定理 6-37 によって，$Q+V$ は自己共役であり，半フレドホルムである．補題 6-43 と定理 6-37 によって，$(Q+V)_+ = Q_+ + V_+$ は半フレドホルムであり $\mathrm{ind}((Q+V)_+) = \mathrm{ind}(Q_+)$．したがって，題意が成立する．□

こうして，自己共役な抽象的 Dirac 作用素の指数は，当該の自己共役な抽象的 Dirac 作用素に対する相対的にコンパクトな摂動のもとで不変であることがわかった．

6-7-4　指数公式

抽象的 Dirac 作用素 Q の指数に対する，ある公式を導いておく．そのために補題を用意する．

補題 6-46　T をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ からヒルベルト空間 $\mathscr{Y}$ への稠密に定義された閉作用素とする．このとき，任意の $E>0$ に対して，ユニタリ作用素 $U_E : \ker(T^*T - E) \longrightarrow \ker(TT^* - E)$ で，

$$U_E\psi = \frac{1}{\sqrt{E}}T\psi, \quad \psi \in \ker(T^*T-E), \tag{6.85}$$

をみたすものが存在する．特に，

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T^*T)\setminus\{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(TT^*)\setminus\{0\} \tag{6.86}$$

であり，T^*T の任意の固有値 $E \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^*T)$ の多重度と，T^*T の固有値としての E の多重度は等しい：

$$\dim\ker(T^*T-E) = \dim\ker(TT^*-E). \tag{6.87}$$

証明　(6.85) によって，$U_E : \ker(T^*T-E) \longrightarrow \mathscr{X}$ を定義すれば，任意の $\psi \in \ker(T^*T-E)$ に対して，$U_E\psi \in D(T^*)$ であり，$T^*U_E\psi = \sqrt{E}\psi$．したがって，$T^*U_E\psi \in D(T)$ であり，$TT^*U_E\psi = \sqrt{E}T\psi = EU_E\psi$．ゆえに，$U_E\psi \in \ker(TT^*-E)$．また，$T^*T\psi = E\psi$ を使うと，

$$\|U_E\psi\|^2 = \frac{\langle T\psi, T\psi\rangle}{E} = \frac{\langle \psi, T^*T\psi\rangle}{E} = \|\psi\|^2.$$

したがって，U_E は内積を保存する．任意の $\phi \in \ker(TT^*-E)$ に対して，$\psi = T^*\phi/\sqrt{E}$ とおけば，$\psi \in D(T)$ であり，

$$T\psi = \sqrt{E}\phi. \tag{$*$}$$

したがって，$T\psi \in D(T^*)$ であり，$T^*T\psi = E\psi$．すなわち，$\psi \in \ker(T^*T-E)$．

これと (*) によって，$\phi = U_E\psi$．ゆえに，$\mathrm{Ran}\,(U_E) = \ker(TT^* - E)$．以上から，$U_E$ は $\ker(T^*T - E)$ から $\ker(TT^* - E)$ へのユニタリである．

$E > 0$ が T^*T の固有値であれば，その固有空間は $\ker(T^*T - E)$ である．これと U_E のユニタリ性により，E は TT^* の固有値でもあり，(6.87) と $\sigma_{\mathrm{p}}(T^*T) \setminus \{0\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(TT^*) \setminus \{0\}$ が得られる．同様にして，この逆の包含関係が示されるので，(6.86) が成立する． □

補題 6-47 T がヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の自己共役作用素で，

$$\inf \sigma(|T|) \setminus \{0\} > 0$$

をみたすならば，$\mathrm{Ran}\,(T)$ は閉である．

証明 $\delta = \inf \sigma(|T|) \setminus \{0\}$ とおく．$|T|$ のスペクトル測度を $E_{|T|}$ とすれば，任意の $\psi \in D(T) \cap (\ker T)^\perp = D(|T|) \cap (\ker |T|)^\perp$ (T が自己共役ならば，$D(T) = D(|T|)$, $\ker T = \ker |T|$ であることに注意) に対して，

$$\begin{aligned} \|T\psi\|^2 = \|\,|T|\psi\|^2 &= \int_{[\delta,\infty)} |\lambda|^2\, d\|E_{|T|}(\lambda)\psi\|^2 \\ &\geq \delta^2 \|E_{|T|}([\delta,\infty))\psi\|^2 = \delta^2 \|E_{|T|}(\{0\} \cup [\delta,\infty))\psi\|^2 \\ &= \delta^2 \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

ここで，$E_{|T|}(\{0\})\psi = 0$ を用いた．これと補題 6-41 によって，$\mathrm{Ran}\,(T)$ は閉である．
□

ここで，ヒルベルト空間上の線形作用素論における基本的に重要な概念を復習しておく．

可分な無限次元ヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上の有界線形作用素 T が**トレース型** (trace class) であるとは，$\mathscr{X}$ の**ある** CONS $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，$\sum_{n=1}^\infty \langle \phi_n, |T|\phi_n\rangle < \infty$ となるときをいう ($|T| := (T^*T)^{1/2}$ は非負自己共役作用素 T^*T の平方根で T の絶対値とよばれる)．T がトレース型のとき，T の**トレース**

$$\mathrm{Tr}\; T := \sum_{n=1}^\infty \langle \phi_n, T\phi_n\rangle$$

が定義される．右辺は絶対収束し，CONS $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ の取り方によらないことが示され

る[17]．次の事実は基本的である．

補題 6-48　T をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上のトレース型作用素とすれば，T^* もトレース型であり，$\mathscr{X}$ 上の任意の有界作用素 S に対して，ST, TS もトレース型である．

証明　加藤 (1967) の §49 や Reed and Simon (1972) の Theorem VI.19 等を参照．
□

ヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ への有界線形作用素 $T(D(T) = \mathscr{X})$ について，任意の有界列 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}$ に対して，$\{T\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する部分列を含むとき，T をコンパクト作用素または**完全連続作用素**とよぶ．

補題 6-49　T をヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ 上のコンパクト作用素とする．このとき，$\sigma(T) \setminus \{0\}$ は多重度が有限の固有値のみからなり，$\sigma(T) \setminus \{0\}$ が無限集合であれば，その集積点は 0 に限られる．

証明　加藤 (1967) の p.293，黒田 (1980) の §11.6 等を参照．　□

補題 6-50　ヒルベルト空間上のすべてのトレース型作用素はコンパクトである．

証明　加藤 (1967) の §49，Reed and Simon (1972) の Theorem VI.21 等を参照．
□

補題 6-51　T_j をヒルベルト空間 $\mathscr{H}_j$ 上の自己共役作用素 $(j = 1, 2)$，$T := T_1 \oplus T_2$ を $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ 上の直和作用素とする (T は自己共役である)．

(i)　E_j を T_j のスペクトル測度とし，$\mathbb{R}$ の任意のボレル集合 J に対して，$\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ 上の作用素 $(E_1 \oplus E_2)(J)$ を

$$(E_1 \oplus E_2)(J) := E_1(J) \oplus E_2(J)$$

によって定義する．このとき，$E_1 \oplus E_2$ は T のスペクトル測度である．

(ii)　$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，$f(T) = f(T_1) \oplus f(T_2)$．

証明　定理 3-7 と同様．　□

---

[17] トレース型作用素についてのわかりやすく詳しい論述が加藤 (1967) の §49 にある (この本では，トレース型作用素のことをスプール型作用素と呼んでいる)．日合-柳 (1995) の §4.2 にもトレース型作用素についての解説がある．

次の定理は，Dirac 型作用素の指数を計算するための公式の 1 つをあたえる．

定理 6-52　Q を自己共役な抽象的 Dirac 作用素で，ある $t>0$ に対して，e^{-tQ^2} がトレース型であるとする．このとき，Q はフレドホルムであり，

$$\mathrm{ind}_\tau(Q)=\mathrm{Tr}\,(\tau e^{-tQ^2})$$

が成り立つ．右辺は t によらない．

証明　簡単な計算によって，

$$Q^2=\begin{pmatrix}Q_+^*Q_+ & 0\\ 0 & Q_+Q_+^*\end{pmatrix}. \tag{6.88}$$

補題 6-51 を $T_1=Q_+^*Q_+$, $T_2=Q_+Q_+^*$ として応用すれば，

$$e^{-tQ^2}=\begin{pmatrix}e^{-tQ_+^*Q_+} & 0\\ 0 & e^{-tQ_+Q_+^*}\end{pmatrix}.$$

これと仮定により，$e^{-tQ_+^*Q_+}$ と $e^{-tQ_+Q_+^*}$ はトレース型の非負自己共役作用素であり，$\|e^{-tQ_+^*Q_+}\|\le 1$, $\|e^{-tQ_+Q_+^*}\|\le 1$. トレース型の作用素はコンパクト作用素であるから (補題 6-50)，$e^{-tQ_+^*Q_+}$ のスペクトルは多重度有限の固有値のみからなり (補題 6-49)，1 以外の固有値を $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ $(1>\lambda_1>\lambda_2>\cdots>0)$ とすれば，$\lambda_n\longrightarrow 0$ $(n\longrightarrow\infty)$ (いま，$\dim\mathfrak{H}_\pm=\infty$ の場合だけを考える) である．したがって，$E_n:=-(\log\lambda_n)/t$ とおけば，$0<E_1<E_2<\cdots$, $E_n\longrightarrow\infty$ $(n\longrightarrow\infty)$ であり，スペクトル写像定理により，$\sigma(Q_+^*Q_+)\setminus\{0\}=\sigma_{\mathrm{p}}(Q_+^*Q_+)\setminus\{0\}=\{E_n\}_{n=1}^\infty$ である．E_n の多重度は有限である．$e^{-tQ_+^*Q_+}$ が固有値 1 をもつ場合は，$Q_+^*Q_+$ が固有値 0 をもつ場合に対応し，$\dim\ker Q_+^*Q+<\infty$ である．補題 6-46 によって，$\sigma(Q_+Q_+^*)\setminus\{0\}=\sigma_{\mathrm{p}}(Q_+Q_+^*)\setminus\{0\}=\{E_n\}_{n=1}^\infty$ であり，$\dim\ker Q_+Q+^*<\infty$ である．補題 6-23 によって，

$$\mathrm{nul}(Q_+)=\mathrm{nul}(Q_+^*Q_+)<\infty,\quad \mathrm{nul}(Q_+^*)=\mathrm{nul}(Q_+Q_+^*)<\infty.$$

(6.88) と作用素解析により，$|Q|=|Q_+|\oplus|Q_+^*|$ であるから，

$$\sigma(|Q|)\setminus\{0\}=\{\sqrt{E_n}\}_{n=1}^\infty.$$

したがって，$\inf\sigma(|Q|)\setminus\{0\}=\sqrt{E_1}>0$ であるから，補題 6-47 によって，$\mathrm{Ran}\,(Q)$ は閉である．したがって，Q はフレドホルムである．各固有値 $E_n>0$ の多重度を m_n としよう．

$$\tau e^{-tQ^2} = \begin{pmatrix} e^{-tQ_+^*Q_+} & 0 \\ 0 & -e^{-tQ_+Q_+^*} \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(\tau e^{-tQ^2}) &= \mathrm{Tr}\ e^{-tQ_+^*Q_+} - \mathrm{Tr}\ e^{-tQ_+Q_+^*} \\
&= \mathrm{nul}(Q_+^*Q_+) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n e^{-tE_n} - \left(\mathrm{nul}(Q_+Q_+^*) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n e^{-tE_n}\right) \\
&= \mathrm{nul}(Q_+) - \mathrm{nul}(Q_+^*) \\
&= \mathrm{ind}_\tau(Q).
\end{aligned}$$

よって題意が証明された. □

注意 6-5　ある $t > 0$ に対して，e^{-tQ^2} がトレース型ならば，任意の $s > t$ に対して，e^{-sQ^2} はトレース型である．なぜなら，作用素解析により，$e^{-sQ^2} = Se^{-tQ^2}$，$S := e^{-(s-t)Q^2}$ と表すことができ，S は有界作用素だからである (補題 6-48 の応用).

6-8 節　Dirac 作用素 Q_S のフレドホルム性と指数

ボソン-フェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ にもどろう．前節の例 6-3 で見たように，Dirac 作用素 Q_S は，自己共役な抽象的 Dirac 作用素の 1 つの具現である．この Dirac 作用素のフレドホルム性と，対合 Γ に関する指数 $\mathrm{ind}_\Gamma(Q_S)$ について考察する．結果は次の通りである．

定理 6-53

(i)　S がフレドホルムで $\mathrm{nul}(S) = 0$ ならば，Q_S はフレドホルムで

$$\mathrm{ind}_\Gamma(Q_S) = \delta_{0,\mathrm{nul}(S^*)} \tag{6.89}$$

が成り立つ.

(ii)　S が半フレドホルムで $\mathrm{nul}(S) \geq 1$ かつ $\mathrm{nul}(S^*) = 0$ ならば，Q_S は半フレドホルムであり，

$$\mathrm{ind}_\Gamma(Q_S) = \infty \tag{6.90}$$

が成り立つ.

この定理を証明するために，補題を 1 つ用意する．

補題 6-54　Ran (S) が閉ならば，

$$\inf \sigma(S^*S) \setminus \{0\} > 0$$

である．

証明　仮定と補題 6-41 により，定数 $C > 0$ があって，任意の $\psi \in D(S^*S) \cap (\ker S)^\perp = D(S^*S) \cap \ker (S^*S)^\perp$ ($\ker S = \ker S^*S$ に注意) に対して，

$$\langle \psi, S^*S\psi \rangle \geq C^2 \|\psi\|^2$$

が成り立つ．$\mathscr{H}$ の直和分解 $\mathscr{H} = \ker S^*S \oplus (\ker S^*S)^\perp$ に応じて，$S^*S = 0 \oplus (S^*S)_\perp$ と直和分解される．ただし，$(S^*S)_\perp$ は S^*S の $(\ker S^*S)^\perp$ における簡約部分である．したがって，$\sigma(S^*S) \setminus \{0\} = \sigma((S^*S)_\perp)$．上の不等式は，$\sigma((S^*S)_\perp) \subset [C^2, \infty)$ を意味する[18)]．したがって，$\inf \sigma(S^*S) \setminus \{0\} \geq C^2 > 0$.　□

定理 6-53 の証明　Dirac 作用素 Q_S の $\wedge_+(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ における部分を $Q_{S,+}$ とすれば，補題 6-39 によって，

$$Q_S = \begin{pmatrix} 0 & Q_{S,+}^* \\ Q_{S,+} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.91}$$

と表される．したがって，

$$Q_S^2 = \begin{pmatrix} Q_{S,+}^* Q_{S,+} & 0 \\ 0 & Q_{S,+} Q_{S,+}^* \end{pmatrix}.$$

これと定理 6-28 により，

$$Q_{S,+}^* Q_{S,+} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Delta_{S,2p}, \quad Q_{S,+} Q_{S,+}^* = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Delta_{S,2p+1}. \tag{6.92}$$

したがって，補題 6-23 に注意して，

$$\ker (Q_{S,+}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \ker (\Delta_{S,2p}), \quad \ker (Q_{S,+}^*) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \ker (\Delta_{S,2p+1}). \tag{6.93}$$

ゆえに

$$\mathrm{nul}(Q_{S,+}) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{nul}(\Delta_{S,2p}), \quad \mathrm{nul}(Q_{S,+}^*) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{nul}(\Delta_{S,2p+1}). \tag{6.94}$$

---

18) 新井 (1997a)，定理 2.30 (ii) を参照．

(i) S はフレドホルムで，$\mathrm{nul}(S) = 0$ をみたすとしよう．特に，$\mathrm{nul}(S^*) < \infty$ である．このとき，定理 6-24，系 6-25 (i) と (6.94) により，

$$\mathrm{nul}(Q_{S,+}) = \sum_{p=0}^{[\mathrm{nul}(S^*)/2]} {}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_{2p} < \infty,$$

$$\mathrm{nul}(Q_{S,+}^*) = \sum_{p=0}^{[(\mathrm{nul}(S^*)-1)/2]} {}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_{2p+1} < \infty.$$

ただし，実数 $a \geq 0$ に対して，$[a]$ は a を越えない最大の整数を表す．したがって，$\mathrm{nul}(S^*) = 0$ ならば，$\mathrm{nul}(Q_{S,+}) = 1$, $\mathrm{nul}(Q_{S,+}^*) = 0$ であるから，$\mathrm{ind}_\Gamma(Q_S) = 1$. $\mathrm{nul}(S^*) \geq 1$ の場合,

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_\Gamma(Q_S) &= \sum_{p=0}^{[\mathrm{nul}(S^*)/2]} {}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_{2p} - \sum_{p=0}^{[(\mathrm{nul}(S^*)-1)/2]} {}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{\mathrm{nul}(S^*)} (-1)^p {}_{\mathrm{nul}(S^*)}C_p \\ &= (1-1)^{\mathrm{nul}(S^*)} = 0.\end{aligned}$$

したがって，(6.89) が得られる．

次に Q_S のフレドホルム性を証明する．S はフレドホルムであるから，$\mathrm{Ran}\,(S)$ は閉である．したがって，補題 6-54 によって，

$$\delta_1 := \inf \sigma(S^*S) \setminus \{0\} > 0.$$

定理 6-37 (i) によって，S^* もフレドホルムであるから，同様に，

$$\delta_2 := \inf \sigma(SS^*) \setminus \{0\} > 0.$$

そこで，$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ とおけば，第 2 量子化作用素のスペクトルの性質 (命題 3-10，定理 4-14) により，すべての $p \geq 1$ に対して，

$$\inf \sigma(\Delta_{S,p}) \setminus \{0\} \geq \delta > 0.$$

したがって，

$$\inf \sigma(Q_{S,+}^* Q_{S,+}) \setminus \{0\} \geq \delta > 0, \quad \inf \sigma(Q_{S,+} Q_{S,+}^*) \setminus \{0\} \geq \delta > 0.$$

これは，

$$\|Q_{S,+}\Psi\|^2 \geq \delta \|\Psi\|^2, \quad \Psi \in D(Q_{S,+}) \cap (\ker\, Q_{S,+})^\perp,$$

$$\|Q_{S,+}^*\Phi\|^2 \geq \delta \|\Phi\|^2, \quad \Phi \in D(Q_{S,+}^*) \cap (\ker\, Q_{S,+}^*)^\perp,$$

を意味する．(6.91) により，

$$\ker Q_S = \ker Q_{S,+} \oplus \ker Q_{S,+}^*$$

であるから，$(\ker Q_S)^\perp = (\ker Q_{S,+})^\perp \oplus (\ker Q_{S,+}^*)^\perp$．したがって，任意の $\Psi = (\Psi_+, \Psi_-) \in D(Q_S) \cap (\ker Q_S)^\perp$ に対して，

$$\|Q_S\Psi\|^2 = \|Q_{S,+}\Psi_+\|^2 + \|Q_{S,+}^*\Phi_-\|^2 \geq \delta^2\|\Psi_+\|^2 + \delta^2\|\Psi_-\|^2$$
$$= \delta\|\Psi\|^2.$$

ゆえに，補題 6-41 によって，$\mathrm{Ran}\,(Q_S)$ は閉である．以上から，Q_S はフレドホルムである．

(ii) S は半フレドホルムで，$\mathrm{nul}(S) \geq 1$，$\mathrm{nul}(S^*) = 0$ をみたすとする．$\mathrm{nul}(S^*) = 0$ により，$p \geq 1$ ならば $\ker \Delta_{S,p} = \{0\}$ (定理 6-24) であるから，$\mathrm{nul}(Q_{S,+}) = \mathrm{nul}(\Delta_{S,0})$，$\mathrm{nul}(Q_{S,+}^*) = 0$．また，$\mathrm{nul}(S) \geq 1$ と系 6-25 (ii) によって，$\mathrm{nul}(\Delta_{S,0}) = \infty$．したがって，(6.90) が得られる．$\mathrm{Ran}\,(Q_S)$ の閉性は (i) の場合と同様． □

定理 6-53 と定理 6-45 により，次の事実を得る．

系 6-55 V は $\mathscr{F}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ 上の，Γ に関する Dirac 型作用素で，Q_S-コンパクトであるとする．

(i) S がフレドホルムで $\mathrm{nul}(S) = 0$ をみたすならば，$Q_S + V$ はフレドホルムであり，

$$\mathrm{ind}_\Gamma(Q_S + V) = \delta_{0,\mathrm{nul}(S^*)}$$

が成り立つ．

(ii) S が半フレドホルムで $\mathrm{nul}(S) \geq 1$ かつ $\mathrm{nul}(S^*) = 0$ ならば，$Q_S + V$ は半フレドホルムであり，

$$\mathrm{ind}_\Gamma(Q_S + V) = \infty$$

が成り立つ．

ノート

この章では，著者によって創始された理論 (1984∼) — ボソン-フェルミオンフォック空間上の Dirac 作用素の理論 — の基礎的な部分を紹介した．この理論を考える発端となったのは，いわゆ

る **Parisi-Wu の確率量子化** (たとえば，Damgaard and Huffel (1988)) に伴う超対称的場の量子論の数学的構成の問題であった (Arai (1984))．その後，超対称的場の量子論のいくつかのモデルが有する普遍的理念を探求する過程を経て，ここに提示したような形をとるに到った[19]．数学的には無限次元空間上の Dirac 作用素の指数理論を構築することが基本的な主題の 1 つである．周知のように，有限次元 Dirac 作用素に関しては指数理論は大きな発展を遂げた[20]．これに対する無限次元版がいかなる形をとるかは極めて興味のあるところである．この問題は無限次元空間における位相幾何学的不変量をみいだす問題にもなる．著者は無限次元 Dirac 作用素の指数に対する汎関数積分表示を導いた (Arai (1989b, 1992a))．これは無限次元空間における位相幾何学的不変量が汎関数積分を用いて定義される可能性を示唆する．

本章の内容に続く，より高次の理論展開については，Arai (1989b, 1992a, 1993a, 1993d, 1995a, 1999c)，Arai and Mitoma (1991, 1993), Mitoma (1991) を参照．短い解説が新井 (1994) にある．しかし，この理論はまだ十分な完成の域に達していない．確率論における関連する研究として Shigekawa (1986), Hino (1997) がある．

6-7 節で論じた抽象的 Dirac 作用素の理論は，有限自由度の量子力学の文脈では，超対称性をもつ量子力学，すなわち，**超対称的量子力学** (supersymmetric quantum mechanics; SSQM) として具現する．これは，物理的な概念図式では，超対称的場の量子論の有限自由度へのある種の還元として得られるものである (Witten (1981, 1982a, 1982b))．SSQM に特徴的なことは，それが，数学的には指数理論やモース理論と結びつき (Alvarez-Gaumé (1983), Witten (1982b))，他方，物理的には，通常の有限自由度の量子力学では起こらないような現象を記述しうるということである[21]．こうした意味において SSQM は興味ある量子力学のクラスを形成する．SSQM のモデルの数学的研究については，Arai (1985, 1987, 1989c), Arai and Ogurisu (1991), Borisov and Ilinski (1994), Grosse and Pittner (1987), Jaffe, Lesniewski and Lewenstein (1987), Ilinski, Kalinin and Melezhik (1995), Thaller (1992) およびそこに引用されている文献を参照[22]．最近では，超対称的量子論と非可換幾何学との関連も論じられている (Fröhlich , Grandjean and Recknagel (1999))．

6 章演習問題

1. 1 次元ユニタリ空間 $\mathbb{C}$ の対 $(\mathbb{C},\mathbb{C})$ に付随するボソン-フェルミオンフォック空間

$$\mathscr{F}(\mathbb{C},\mathbb{C}) = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C})\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathbb{C}) = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C})\otimes(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C})$$

---

[19] 物理としての超対称的場の量子論については，たとえば，Bailin and Love (1994), Freund (1986), Wess and Bagger (1983) を参照．数学的に厳密な基礎づけの研究については，Jaffe and Lesniewski (1988) を参照．

[20] たとえば，Gilkey (1995)，吉田 (1998) を参照．

[21] たとえば，基底状態の非自明な縮退 (Jaffe 他 (1987), Arai (1989c), Arai and Ogurisu (1991)) や形式的摂動論が破綻する現象 (Arai (1985))．

[22] 物理の文献は膨大であるので，ここに言及するのは割愛する．

を考える．$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$, $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathbb{C})$ 上の消滅作用素をそれぞれ，$A(z), B(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ とし，$A := A(1)$, $B := B(1)$ とおく．

(i)　任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して，s を $\mathbb{C}$ 上のスカラー作用素と見るとき，

$$d_s = sA \otimes B^*$$

を示せ．

(ii)　任意の $\omega > 0$ に対して，

$$\psi_s := \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}(sB^* + s^*B), \quad \eta_s := \frac{i}{\sqrt{2\omega}}(sB^* - s^*B),$$

を定義する．

$$\psi_s^2 = \frac{\omega|s|^2}{2}, \quad \eta_s^2 = \frac{|s|^2}{2\omega}, \quad \{\psi_s, \eta_s\} = 0,$$

を示せ．

(iii)　作用素

$$q := \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(A^* + A), \quad p := \frac{i\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}(A^* - A),$$

について，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathbb{C})$ 上で $[q,p] = i$ が成立することを示せ．

(iv)　$[D(A) \cap D(A^*)] \hat{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathbb{C})$ 上で

$$Q_s = p \otimes \eta_s + q \otimes \psi_s$$

が成立することを示せ．

(v)　$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ の基底 $\phi_1 := \Omega_{\mathbb{C}}$, $\phi_2 := B^*\Omega_{\mathbb{C}}$ に関する B の行列表示を

$$\hat{B} := \begin{pmatrix} \langle \phi_1, B\phi_1 \rangle & \langle \phi_1, B\phi_2 \rangle \\ \langle \phi_2, B\phi_1 \rangle & \langle \phi_2, B\phi_2 \rangle \end{pmatrix}$$

とすれば

$$\hat{B} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \quad \hat{B}^* = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2),$$

であることを示せ．ここで，σ_j は Pauli 行列である．これを用いて，

$$\hat{\psi}_s = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}\{(\mathrm{Re}\, s)\sigma_1 + (\mathrm{Im}\, s)\sigma_2\}, \quad \hat{\eta}_s = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\{-(\mathrm{Im}\, s)\sigma_1 + (\mathrm{Re}\, s)\sigma_2\},$$

を示せ．ただし，$\hat{\psi}_s$, $\hat{\eta}_s$ はそれぞれ，ψ_s, η_s の (ϕ_1, ϕ_2 に関する) 行列表示である．

2. 記号は前問にしたがうとする．T を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$ 上の有界線形作用素とするとき，

$$D := d_s + T \otimes B^*$$

は閉作用素であり，$D^2 = 0$ をみたすことを示せ．

3. $n \in \mathbb{N}$ を任意にとり，$(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ に付随するボソン-フェルミオンフォック空間

$$\mathscr{F}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathbb{C}^n) = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}) \otimes \wedge(\mathbb{C}^n)$$

を考える．ただし，

$$\wedge(\mathbb{C}^n) := \bigoplus_{j=0}^{n} \overset{j}{\wedge}(\mathbb{C}).$$

$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}^n)$, $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathbb{C}^n)$ 上の消滅作用素をそれぞれ，$A(z)$, $B(z)$ $(z \in \mathbb{C}^n)$ とし，$A_j := A(0, \cdots, 0, \overset{j\ 番目}{1}, 0, \cdots, 0)$, $B_j := B(0, \cdots, 0, \overset{j\ 番目}{1}, 0, \cdots, 0)$ とおく．

(i)　$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathbb{C}^n)$ 上で

$$[A_j, A_k^*] = \delta_{jk}, \quad [A_j, A_k] = 0, \quad j, k = 1, \cdots, n$$

が成立することを示せ．

(ii)

$$\alpha_j := i(B_j^* - B_j), \quad \beta_j := B_j^* + B_j,$$

とおくと，

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk}, \quad \{\beta_j, \beta_k\} = 2\delta_{jk},$$

$$\{\alpha_j, \beta_k\} = 0, \quad j, k = 1, \cdots, n,$$

が成立することを示せ．

(iii)　6-2 節の記号において，$\mathscr{H} = \mathscr{K} = \mathbb{C}^n$, $S = t$ (実数 t によるスカラー作用素) の場合を考える．$\left[\bigcap_{j=1}^{n} D(A_j)\right] \hat{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathbb{C}^n)$ 上で

$$d_t = t \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j^*$$

となることを示せ．

(iv)　$\omega > 0$ を任意の定数とする．作用素

$$q_j := \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(A_j^* + A_j), \quad p_j := \frac{i\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}(A_j^* - A_j),$$

について，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathbb{C})$ 上で

$$[q_j, p_k] = i\delta_{jk}, \quad j, k = 1, \cdots, n,$$

が成立することを示せ．

(v)　$D_0 = \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathbb{C}^n) \hat{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathbb{C}^n)$ とおく．D_0 上で

$$Q_t = d_t + d_t^* = t \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\omega}} p_j \otimes \alpha_j + \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_j \otimes \beta_j \right\}$$

と表されることを示せ．また，D_0 上で

$$Q_t^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left\{\frac{t^2 p_j^2}{\omega} + t^2\omega q_j^2\right\}\otimes I - \frac{i}{2}t^2\sum_{j=1}^n I\otimes\alpha_j\beta_j$$

となることを示せ．

(vi)　d_t の摂動

$$\tilde{d}_t := d_t - t\sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{\omega}{2}}\, q_j\otimes B_j^*$$

を考え，$\tilde{Q}_t := \tilde{d}_t + \tilde{d}_t^*$ とおく．このとき，D_0 上で

$$\tilde{d}_t^2 = 0,$$

$$\tilde{Q}_t = \sum_{j=1}^n \frac{t}{\sqrt{2\omega}} p_j\otimes\alpha_j,$$

$$\tilde{Q}_t^2 = \sum_{j=1}^n \frac{t^2 p_j^2}{2\omega}\otimes I,$$

が成立することを示せ．

4. 6-2 節の記号にしたがう．$\mathscr{D}_S^\infty$ 上で次の関係式が成り立つことを示せ．

$$[d_S, A(f)\otimes I] = 0, \quad [d_S, A(f)^*\otimes I] = I\otimes B(Sf)^*, \quad f\in D(S),$$

$$\{d_S, I\otimes B(u)\} = A(S^*u)\otimes I, \quad \{d_S, I\otimes B(u)^*\} = 0, \quad u\in D(S^*).$$

付 録 A

ベクトル列の弱収束と有界作用素列の強収束

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間とする．$\mathscr{H}$ のベクトル列 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{H}$ とベクトル $\psi \in \mathscr{H}$ について，任意の $\phi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \langle \phi, \psi_n \rangle = \langle \phi, \psi \rangle \tag{A.1}$$

が成り立つとき，$\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ は ψ に**弱収束** (weak convergence) するといい，記号的に $\text{w-}\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ あるいは $\psi_n \xrightarrow{\text{w}} \psi \ (n \longrightarrow \infty)$ と表す．

応用上，あたえられたベクトル列がいつ弱収束するかという問題にしばしば出会う．この問題に対する 1 つの解答は次の命題によってあたえられる．

命題 A-1 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{H}$ を有界列，すなわち，$\sup_{n\geq 1} \|\psi_n\| < \infty$ をみたす列とする．ベクトル $\psi \in \mathscr{H}$ と $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ があって，任意の $\phi \in \mathscr{D}$ に対して，(A.1) が成立するとする．このとき，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$.

証明 ϕ を $\mathscr{H}$ の任意の元とする．$K > \max\{\sup_{n\geq 1} \|\psi_n\|, \|\psi\|\}$ をみたす定数 K を任意にとる．$\mathscr{D}$ の稠密性により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\|\phi_\varepsilon - \phi\| < \varepsilon/(3K)$ をみたす $\phi_\varepsilon \in \mathscr{D}$ がある．仮定により，(ε に依存しうる) 番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，

$$|\langle \phi_\varepsilon, \psi_n \rangle - \langle \phi_\varepsilon, \psi \rangle| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．恒等式

$$\langle \phi, \psi_n \rangle - \langle \phi, \psi \rangle = \langle \phi - \phi_\varepsilon, \psi_n \rangle + (\langle \phi_\varepsilon, \psi_n \rangle - \langle \phi_\varepsilon, \psi \rangle) + \langle \phi_\varepsilon - \phi, \psi \rangle$$

と三角不等式および Schwarz (シュヴァルツ) の不等式により，$n \geq n_0$ ならば,

$$|\langle \phi, \psi_n \rangle - \langle \phi, \psi \rangle| \leq \|\phi - \phi_\varepsilon\|\|\psi_n\| + |\langle \phi_\varepsilon, \psi_n \rangle - \langle \phi_\varepsilon, \psi \rangle| + \|\phi_\varepsilon - \phi\|\|\psi\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

したがって，(A.1) がすべての $\phi \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ． □

注意 A-1　命題 A-1 で，ベクトル列 $\{\psi_n\}_n$ が非有界のときは，命題 A-1 の結論は成立しない．なぜなら，弱収束する列はかならず有界であるからである (一様有界性の原理の応用).

例 A-1　$\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathscr{H}$ の 1 つの CONS とする．$p > 1$ としてベクトル列 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ を $\psi_n = n^p \xi_n$ によって定義する．このとき，$\|\psi_n\| = n^p$ であるから，$\{\psi_n\}_n$ は有界ではない．$\mathscr{D}_0 := \mathscr{L}\{\xi_n \,|\, n \geq 1\}$ とすれば，これは $\mathscr{H}$ で稠密である．任意の $\phi \in \mathscr{D}_0$ に対して，番号 n_0 と複素数 α_j $(j = 1, \cdots, n_0)$ があって，$\phi = \sum_{j=1}^{n_0} \alpha_j \xi_j$ と表される．したがって，$n \geq n_0$ ならば $\langle \phi, \psi_n \rangle = 0$，すなわち，$\lim_{n\to\infty} \langle \phi, \psi_n \rangle = 0 = \langle \phi, 0 \rangle$．しかし，w-$\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0$ は成立しない．実際，たとえば，$\phi_1 := \sum_{n=1}^\infty \xi_n/n$ は $\mathscr{H}$ の元であるが，$\langle \phi_1, \psi_n \rangle = n^{p-1} \longrightarrow \infty$ $(n \longrightarrow \infty)$ となるからである．

注意 A-2　命題 A-1 の証明の方法に使われているアイデアは，通常,「$\varepsilon/3$ 論法」とよばれる．このアイデアは，解析学全般にわたって，極めて基本的なテクニックであり，種々の場面において力を発揮する．

$\mathscr{K}$ をヒルベルト空間とし，$\mathscr{H}$ を定義域とする，$\mathscr{H}$ から $\mathscr{K}$ への有界線形作用素の全体を $\mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ によって表す．

有界作用素の列 $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ と $T \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ について，すべての $\psi \in \mathscr{H}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} \|T_n\psi - T\psi\|_{\mathscr{K}} = 0$ が成立するとき，$\{T_n\}_n$ は T に**強収束** (strong convergence) するといい，記号的に，s-$\lim_{n\to\infty} T_n = T$ あるいは $T_n \xrightarrow{\mathrm{s}} T$ $(n \longrightarrow \infty)$ と表す．

命題 A-2　$T_n \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ $(n \in \mathbb{N})$ とし，$\{T_n\}_n$ は有界，すなわち，$\sup_{n\geq 1} \|T_n\| < \infty$ であるとする．$\mathscr{H}$ の稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ と $T \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ があって，任意の $\psi \in \mathscr{D}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n\psi - T\psi\|_{\mathscr{K}} = 0 \tag{A.2}$$

が成り立っているとする．このとき，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

証明 注意 A-2 で言及した，$\varepsilon/3$ 論法のアイデアを用いる．ψ を $\mathscr{H}$ の任意の元とする．$K > \max\{\sup_{n\geq 1}\|T_n\|, \|T\|\}$ をみたす定数 K を任意にとる．$\mathscr{D}$ の稠密性により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\|\psi_\varepsilon - \psi\| < \varepsilon/(3K)$ をみたす $\psi_\varepsilon \in \mathscr{D}$ がある．仮定により，(ε に依存しうる) 番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，

$$\|T_n\psi_\varepsilon - T\psi_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．恒等式

$$T_n\psi - T\psi = (T_n\psi - T_n\psi_\varepsilon) + (T_n\psi_\varepsilon - T\psi_\varepsilon) + (T\psi_\varepsilon - T\psi)$$

と三角不等式により，$n \geq n_0$ ならば，

$$\begin{aligned}\|T_n\psi - T\psi\| &\leq \|T_n\psi - T_n\psi_\varepsilon\| + \|T_n\psi_\varepsilon - T\psi_\varepsilon\| + \|T\psi_\varepsilon - T\psi\| \\ &\leq \|T_n\|\,\|\psi - \psi_\varepsilon\| + \|T_n\psi_\varepsilon - T\psi_\varepsilon\| + \|T\|\|\psi_\varepsilon - \psi\| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって，(A.2) がすべての $\psi \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ． □

注意 A-3 命題 A-2 において，有界作用素の列 $\{T_n\}_n$ が非有界性ならば，命題 A-2 の結論は成立しない．なぜなら，強収束する有界作用素の列はかならず有界であるからである (一様有界性の原理の応用).

例 A-2 $\{\xi_n\}_n$ を注意 A-1 における例の CONS とし，$\mathscr{H}$ 上の有界作用素 T_n を $T_n\psi := n^p\langle\xi_n, \psi\rangle\xi_n$ によって定義する ($p > 1$)．このとき，$\|T_n\| = n^p$ となるから，$\{T_n\}_n$ は有界でない．$\psi \in \mathscr{D}_0$ ならば，十分大きなすべての n に対して，$\langle\xi_n, \psi\rangle = 0$ であるから，$T_n\psi = 0$．したがって，$\lim_{n\to\infty} T_n\psi = 0$．しかし，$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n/n \in \mathscr{H}$ に対しては，$\|T_n\psi\| = n^{p-1} \longrightarrow \infty$ $(n \longrightarrow \infty)$ となるので，T_n は 0 に強収束しない．

付 録 B

自己共役作用素に関するいくつかの基本的事実

B-1 節　よく使われる不等式

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間とする．$\mathscr{H}$ 上の線形作用素 A のスペクトル，レゾルヴェント集合をそれぞれ，$\sigma(A)$, $\varrho(A)$ で表す．

命題 B-1　A を $\mathscr{H}$ 上の任意の対称作用素とする．このとき，任意の $z \in \varrho(A) \setminus \mathbb{R}$ に対して，

$$\|(A-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|} \tag{B.1}$$

が成立する．

証明　$z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ とする．A の対称性を用いると，任意の $\Psi \in D(A)$ に対して，

$$\|(A-z)\Psi\|^2 = \|(A-x)\Psi\|^2 + y^2\|\Psi\|^2 \geq y^2\|\Psi\|^2.$$

$z \in \varrho(A)$ ならば，任意の $\Phi \in \mathscr{H}$ に対して，$(A-z)\Psi = \Phi$ をみたす $\Psi \in D(A)$ がある．この場合，$\Psi = (A-z)^{-1}\Phi$ であるから，上の不等式は，$\mathrm{Im}\, z = y \neq 0$ ならば，

$$\|(A-z)^{-1}\Phi\|^2 \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|^2}\|\Phi\|^2$$

を意味する．したがって，(B.1) が得られる．　□

命題 B-2　A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．$z \in \varrho(A)$ に対して，

$$C_z := 1/\inf_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda - z|$$

とおく．このとき，任意の $z \in \varrho(A)$ に対して，

$$\|(A - z)^{-1}\| \le C_z$$

が成り立つ．

証明　自己共役作用素 A のスペクトル測度を E_A と記す．A のスペクトル表示 $A = \int_{\sigma(A)} \lambda\, dE_A(\lambda)$ によって，任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\|(A - z)^{-1}\Psi\|^2 = \int_{\sigma(A)} \frac{1}{|\lambda - z|^2}\, d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2 \le C_z^2 \|\Psi\|^2.$$

したがって，求める不等式を得る．□

命題 B-3　A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素，$p \in \mathbb{N}$ とする．このとき，任意の $k = 1, \cdots, p-1$ に対して，$D(A^p) \subset D(A^k)$ であり，

$$\|A^k \psi\|^2 \le \|\psi\|^2 + \|A^p \psi\|^2, \quad \psi \in D(A^p). \tag{B.2}$$

証明　任意の $\psi \in D(A^p)$ に対して，$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2p}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 < \infty$．したがって，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2k}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 &= \int_{|\lambda| \le 1} |\lambda|^{2k}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 + \int_{|\lambda| > 1} |\lambda|^{2k}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \\ &\le \int_{|\lambda| \le 1} d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 + \int_{|\lambda| > 1} |\lambda|^{2p}\, d\|E_A(\lambda)\psi\|^2 \\ &\le \|\psi\|^2 + \|A^p \psi\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

したがって，$\psi \in D(A^k)$ であり，(B.2) が成り立つ．□

B-2 節　絶対連続スペクトルと特異スペクトル

A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素，E_A をそのスペクトル測度とする．
任意のベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\mu_\Psi(B) := \|E_A(B)\Psi\|^2, \quad B \in \boldsymbol{B}^1 \ (\mathbb{R}\text{ のボレル集合体}), \tag{B.3}$$

によって定義される μ_Ψ は $\mathbb{R}$ 上の有界測度である．この測度がルベーグ測度に関して絶対連続であるとき，Ψ は A **に関して絶対連続**であるという．他方，μ_Ψ がルベーグ測度に関して特異であるとき，Ψ は A **に関して特異**であるという．

A に関して絶対連続なベクトルの全体を $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ で表し，これを A **に関する絶対連続部分空間**という．また，A に関して特異なベクトルの全体を $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$ で表し，これを A **に関する特異部分空間**という．

定理 B-4

(i) $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ と $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$ は $\mathscr{H}$ におけるたがいに直交する閉部分空間であり，

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A) \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A) \tag{B.4}$$

が成り立つ．

(ii) $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ と $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$ はそれぞれ，A を簡約する．

証明 (i) まず，

$$\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A) \perp \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A) \tag{$*$}$$

を示す．$\Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A), \Phi \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$ とする．特異ベクトルの定義により，$\|E_A(\mathbb{R} \setminus S_0)\Phi\| = 0$ をみたすボレル集合 S_0 でそのルベーグ測度 $|S_0|$ が 0 であるものが存在する．したがって，$E_A(S_0)\Phi = \Phi$．ゆえに，

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi, E_A(S_0)\Phi \rangle = \langle E_A(S_0)\Psi, \Phi \rangle.$$

Ψ は A に関する絶対連続ベクトルであるから，$\|E_A(S_0)\Psi\| = 0$，すなわち，$E_A(S_0)\Psi = 0$．よって，$\langle \Psi, \Phi \rangle = 0$．ゆえに，$(*)$ が成立する．

次に，

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A) + \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A) \tag{$**$}$$

を示す[1]．$\Xi \in \mathscr{H}$ とする．ルベーグの分解定理により，測度 $\mu_\Xi(B)$ $(B \in \boldsymbol{B}^1)$ は $\mu_\Xi(B) = m_1(B) + m_2(B)$ と分解できる．ここで，m_1 は絶対連続測度，m_2 は特異測度である．$|B_0| = 0$ をみたすボレル測度 B_0 で $m_2(B) = m_2(B \cap B_0)$ となるものがある．$\Phi = E_A(B_0)\Xi$，$\Psi = \Xi - \Phi$ とおこう．このとき，

$$\begin{aligned}\mu_\Phi(B) &= \|E_A(B)E_A(B_0)\Xi\|^2 = \|E_A(B \cap B_0)\Xi\|^2 \\ &= \mu_\Xi(B \cap B_0) = m_2(B \cap B_0)\end{aligned}$$

---

[1] ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の部分空間 $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$ に対して，$\mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in \mathscr{V}_1, v_2 \in \mathscr{V}_2\}$.

$$= m_2(B).$$

ここで，$m_1(B \cap B_0) = 0$ を用いた．したがって，$\Phi \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$．また，

$$\begin{aligned}\mu_\Psi(B) &= \|E_A(B)(1 - E_A(B_0))\Xi\|^2 \\ &= \|E_A(B)\Xi\|^2 - \|E_A(B \cap B_0)\Xi\|^2 = \mu_\Xi(B) - m_2(B) \\ &= m_1(B).\end{aligned}$$

したがって，$\Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$．ゆえに，$\Xi = \Psi + \Phi \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A) + \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$．よって，(**) が成立する．

(*), (**) は $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$, $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$ がたがいに直交する閉部分空間であること，および (B.4) を意味する．

(ii) $\Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ ならば，任意の $B \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，$E_A(B)\Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ である．実際，$|S| = 0$ ($S \in \boldsymbol{B}^1$) ならば，$E_A(S)\Psi = 0$ であることにより，$E_A(S)E_A(B)\Psi = E_A(S \cap B)\Psi = 0$ となるからである．したがって，$E_A(B)\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A) \subset \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$．これは，$E_A(B)$ の自己共役性と (B.4) によって，$E_A(B)\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A) \subset \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$ を意味する．したがって，$\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ 上への正射影作用素を P とすれば，すべての $B \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，$E_A(B)P = PE_A(B)$．これと作用素解析により，$PA \subset AP$ が導かれる．ゆえに，$\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ は A を簡約する．これがわかれば，(B.4) によって，$\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$ も A を簡約する． □

A の固有ベクトルの全体から生成される部分空間を $\mathscr{D}_{\mathrm{p}}(A)$ とし，

$$\mathscr{H}_{\mathrm{p}}(A) := \overline{\mathscr{D}_{\mathrm{p}}(A)} \tag{B.5}$$

とおく．

補題 B-5 $\mathscr{H}_{\mathrm{p}}(A) \subset \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$.

証明 Ψ を A の固有ベクトルとすれば $A\Psi = \lambda\Psi$ をみたす $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ がある．そこで，$S_0 = \{\lambda\}$ (1 点からなる集合) とすれば，$|S_0| = 0$ であり，$\|E_A(\mathbb{R} \setminus S_0)\Psi\| = 0$. したがって，$\Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$．ゆえに，$\mathscr{D}_{\mathrm{p}}(A) \subset \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A)$．そこで，この包含関係の閉包をとれば求める結果を得る． □

補題 B-5 によって，

$$\mathscr{H}_{\mathrm{sc}}(A) := \mathscr{H}_{\mathrm{p}}(A)^\perp \cap \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A) \subset \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(A) \tag{B.6}$$

が定義される．この閉部分空間を A に**関する特異連続部分空間**という．

定理 B-4 によって，$\mathscr{H}$ は

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A) \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{sc}}(A) \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{p}}(A) \tag{B.7}$$

と直交分解できる．$\mathscr{H}_\sharp(A) \neq \{0\}$ ($\sharp = \mathrm{ac, s, p}$) のとき，$A$ の $\mathscr{H}_\sharp(A)$ における部分を $A_\sharp$ とすれば，

$$A = A_{\mathrm{ac}} \oplus A_{\mathrm{s}} \oplus A_{\mathrm{p}}. \tag{B.8}$$

この場合，自己共役作用素 A_{ac} (それぞれ，$A_{\mathrm{sc}}, A_{\mathrm{p}}$) を A の**絶対連続部分** (それぞれ，**特異連続部分，点スペクトル部分**) という．$\sigma(A)$ の部分集合

$$\sigma_{\mathrm{ac}}(A) := \sigma(A_{\mathrm{ac}}), \quad \sigma_{\mathrm{sc}}(A) := \sigma(A_{\mathrm{sc}}) \tag{B.9}$$

をそれぞれ，A の**絶対連続スペクトル，特異連続スペクトル**という．

$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ のとき，A は**絶対連続**，あるいは**純粋に絶対連続スペクトルをもつ**という．

$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{sc}}(A)$ のとき，A は**特異連続**，あるいは**純粋に特異連続スペクトルをもつ**という．

$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{p}}(A)$ のとき，A は**純粋に点スペクトルをもつ**という．

次の事実は重要である．

定理 B-6　A は絶対連続であるとする．このとき，任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\lim_{t\to\pm\infty} \langle \Phi, e^{itA}\Psi \rangle = 0.$$

証明　偏極恒等式により，$\Phi = \Psi$ の場合を示せば十分である．作用素解析により，

$$\langle \Psi, e^{itA}\Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}\, d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2.$$

A の絶対連続性により，

$$\|E_A(B)\Psi\|^2 = \int_B f_\Psi(\lambda)\, d\lambda$$

となる非負関数 $f_\Psi \in L^1(\mathbb{R})$ が存在する．したがって，

$$\langle \Psi, e^{itA}\Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} f_\Psi(\lambda)\, d\lambda.$$

リーマン-ルベーグの補題により，右辺は，$t \longrightarrow \pm\infty$ のとき，0 に収束する．　□

B-3 節　強レゾルヴェント収束

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ と $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} \|(A_n - z)^{-1}\Psi - (A - z)^{-1}\Psi\| = 0$ が成り立つとき，A_n は A に**強レゾルヴェント収束**するという．

補題 B-7　T_n, T $(n \in \mathbb{N})$ を $\mathscr{H}$ 上の有界線形作用素とし，T_n は T に強収束しているとする (すなわち，任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} T_n\Psi = T\Psi$)．このとき，

$$\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

証明　$\Psi \in \mathscr{H}$ を任意に固定する．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$\|T_n\Psi - T\Psi\| < \varepsilon$．したがって，

$$\|T\Psi\| \leq \|T_n\Psi\| + \varepsilon \leq (\|T_n\| + \varepsilon)\|\Psi\|.$$

したがって，$a = \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$ とすれば，$\|T\Psi\| \leq (a + \varepsilon)\|\Psi\|$．そこで，$\varepsilon \longrightarrow 0$ とすれば，$\|T\Psi\| \leq a\|\Psi\|$ を得るから，$\|T\| \leq a$ である．□

補題 B-8　B を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素，$a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ とし，

$$z_0 = \frac{a+b}{2} + i\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

とおく．このとき，$(a,b) \cap \sigma(B) = \varnothing$ であるための必要十分条件は

$$\|(B - z_0)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{b-a} \tag{B.10}$$

が成り立つことである．

証明　(必要性) $(a,b) \cap \sigma(B) = \varnothing$ とする．このとき，$\inf_{\lambda\in\sigma(B)} |\lambda - z_0| = (b-a)/\sqrt{2}$．したがって，命題 B-2 により，(B.10) が得られる．

(十分性) 対偶を示す．したがって，$(a,b) \cap \sigma(B) \neq \varnothing$ を仮定し，$E \in (a,b) \cap \sigma(B)$ とする．まず，$a < E < (a+b)/2$ の場合を考える．十分 $\delta > 0$ を小さくとれば，$I_E := (E - \delta, E + \delta) \subset (a, (a+b)/2)$ とできる．$E_B(I_E) \neq 0$ であるから，零でないベクトル $f \in \mathrm{Ran}\,(E_B(I_E))$ が存在する．これに対して，

$$\|(B - z_0)^{-1} f\|^2 = \int_{I_E} \frac{1}{|\lambda - z_0|} \, d\|E_B(\lambda) f\|^2.$$

一方，

$$c := \sqrt{\left(E - \delta - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

とおくと，$\lambda \in I_E$ ならば，$|\lambda - z_0| \leq c$. したがって，$\|(B - z_0)^{-1} f\|^2 \geq c^{-2}\|f\|^2$. これは，$\|(B - z_0)^{-1}\| \geq c^{-1}$ を意味する．容易にわかるように，$c^{-1} > \sqrt{2}/(b-a)$. よって，$\|(B - z_0)^{-1}\| > \sqrt{2}/(b-a)$. $(a+b)/2 \leq E < b$ の場合も同様. □

命題 B-9 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし，A_n は A に強レゾルヴェント収束しているとする．このとき

(i) $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ かつすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $(a, b) \cap \sigma(A_n) = \varnothing$ ならば，$(a, b) \cap \sigma(A) = \varnothing$ である．

(ii) 任意の $\lambda \in \sigma(A)$ に対して，部分列 $\{n_k\}_k$ と $\lambda_k \in \sigma(A_{n_k})$ が存在し，$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda$ が成立する．

証明 (i) 仮定と補題 B-8 によって，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\|(A_n - z_0)^{-1}\| \leq \sqrt{2}/(b-a)$. これと補題 B-7 によって，

$$\|(A - z_0)^{-1}\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|(A_n - z_0)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{b-a}.$$

したがって，再び，補題 B-8 によって，$(a, b) \cap \sigma(A) = \varnothing$ を得る．

(ii) 任意の $k > 0$ に対して，$(\lambda - k^{-1}, \lambda + k^{-1}) \cap \sigma(A) \neq \varnothing$ であるから，(i) によって，ある $n_k \in \mathbb{N}$ があって，$(\lambda - k^{-1}, \lambda + k^{-1}) \cap \sigma(A_{n_k}) \neq \varnothing$. そこで，$\lambda_k \in (\lambda - k^{-1}, \lambda + k^{-1}) \cap \sigma(A_{n_k})$ を 1 つ選べば，これが求める数列である． □

定理 B-10 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし，$\mathscr{D}$ は A の芯で，$\mathscr{D} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A_n)$ をみたすとする．さらに，任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} A_n\Psi = A\Psi$ が成り立っているとする．このとき，A_n は A に強レゾルヴェント収束する．

証明 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\Psi = (A - z)\Phi$ $(\Phi \in \mathscr{D})$ とする．このとき，

$$[(A_n - z)^{-1} - (A - z)^{-1}]\Psi = (A_n - z)^{-1}(A - A_n)\Phi$$

であるから，

$$\|[(A_n - z)^{-1} - (A_- z)^{-1}]\Psi\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}\|(A - A_n)\Phi\| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}(A_n - z)^{-1}\Psi = (A_- z)^{-1}\Psi. \qquad (*)$$

$\mathscr{D}$ は A の芯であるから，$\{(A-z)\Phi \,|\, \Phi \in \mathscr{D}\}$ は $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間である (定理 2-11 の証明と同様)．また，$\sup_{n\geq 1}\|(A_n - z)^{-1}\| \leq |\mathrm{Im}\, z|^{-1}$．したがって，命題 A-2 を応用することができ，すべての $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，(*) が成り立つことになる．　□

付 録 C

直和ヒルベルト空間上の作用素

$\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ をヒルベルト空間とし,

$$\mathscr{H} := \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 = \{(\psi, \phi) \,|\, \psi \in \mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2\}$$

とする. L を $\mathscr{H}$ 上の任意の線形作用素としよう. $L(\psi, \phi) = (L(\psi, \phi)_1, L(\psi, \phi)_2)$ と書く. このとき, $\mathscr{H}_k$ から $\mathscr{H}_j$ への線形作用素 L_{jk} $(j, k = 1, 2)$ が次のように定義される:

$$D(L_{11}) := \{\psi \in \mathscr{H}_1 \,|\, (\psi, 0) \in D(L)\}, \quad L_{11}\psi := L(\psi, 0)_1,$$

$$D(L_{12}) := \{\phi \in \mathscr{H}_2 \,|\, (0, \phi) \in D(L)\}, \quad L_{12}\phi := L(0, \phi)_1,$$

$$D(L_{21}) := \{\psi \in \mathscr{H}_1 \,|\, (\psi, 0) \in D(L)\}, \quad L_{21}\psi := L(\psi, 0)_2,$$

$$D(L_{22}) := \{\phi \in \mathscr{H}_2 \,|\, (0, \phi) \in D(L)\}, \quad L_{22}\phi := L(0, \phi)_2.$$

定義から, $D(L_{11}) = D(L_{21}), D(L_{12}) = D(L_{22})$ である. $\mathscr{H}$ のベクトル $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ $(\psi_j \in \mathscr{H}_j,\ j = 1, 2)$ を縦ベクトル

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

で表すと, L は

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \quad (D(L_{11}) \oplus D(L_{22}) \text{ 上})$$

という形に行列表示される.

さて，A を $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ への稠密に定義された閉作用素とし，$\mathscr{H}$ 上の線形作用素

$$M_A := \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

を考える．すなわち，

$$D(M_A) := D(A) \oplus D(A^*), \quad M_A(\psi, \phi) := (A^*\phi, A\psi), \quad (\psi, \phi) \in D(M_A).$$

定理 C-1　M_A は自己共役作用素である．

証明　$D(M_A)$ が $\mathscr{H}$ で稠密であることは明らか (A は閉であるから，$D(A^*)$ は稠密[1])．さらに，任意の $(\psi, \phi) \in D(M_A)$ に対して，

$$\langle (\psi, \phi), M_A(\psi, \phi) \rangle = \langle \psi, A^*\phi \rangle + \langle \phi, A\psi \rangle = 2\mathrm{Re}\, \langle A\psi, \phi \rangle.$$

したがって，$\langle (\psi, \phi), M_A(\psi, \phi) \rangle$ は実数であるから，M_A は対称作用素である．

次に M_A は閉であることを示す．$u_n = (\psi_n, \phi_n) \in D(M_A)$, $u_n \longrightarrow u = (\psi, \phi) \in \mathscr{H}$, $M_A u_n \longrightarrow v = (\eta, \xi) \in \mathscr{H}$ $(n \longrightarrow \infty)$ としよう．このとき，

$$\psi_n \longrightarrow \psi, \quad \phi_n \longrightarrow \phi, \quad A^*\phi_n \longrightarrow \eta, \quad A\psi_n \longrightarrow \xi, \quad n \longrightarrow \infty.$$

A, A^* は閉であるから，$\phi \in D(A^*)$, $\psi \in D(A)$ かつ $A^*\phi = \eta, A\psi = \xi$．したがって，$u \in D(M_A)$ かつ $M_A u = v$．ゆえに M_A は閉である．

最後に，M_A の自己共役性を示すために，$\mathrm{Ran}\,(M_A \pm i) = \mathscr{H}$ を示す．M_A は閉対称作用素であるから，$\mathrm{Ran}\,(M_A \pm i)$ は閉部分空間である[2]．したがって，$\mathrm{Ran}\,(M_A \pm i)^\perp = \{0\}$ を示せばよい．そこで，$v = (\eta, \xi) \in \mathrm{Ran}\,(M_A + i)^\perp$ とすれば，任意の $u = (\psi, \phi) \in D(M_A)$ に対して，$\langle v, (M_A + i)u \rangle = 0$．左辺を計算すれば，

$$\langle \eta, A^*\phi + i\psi \rangle + \langle \xi, A\psi + i\phi \rangle = 0. \tag{C.2}$$

$\phi = 0$ の場合を考えると，

$$\langle \xi, A\psi \rangle = \langle i\eta, \psi \rangle$$

を得る．$\psi \in D(A)$ は任意であるから，これは，

$$\xi \in D(A^*) \text{ かつ } A^*\xi = i\eta \tag{$*$}$$

を意味する．

---

[1] 新井 (1997a) の命題 2.20.

[2] 新井 (1997a) の補題 2.29 (iii).

(C.2) において，$\psi = 0$ の場合には，

$$\langle \eta, A^* \phi \rangle = \langle i\xi, \phi \rangle.$$

$\phi \in D(A^*)$ は任意であったから，$\eta \in D(A^{**}) = D(A)$ かつ $A\eta = i\xi$．これと (*) から，$A^*\xi \in D(A)$ であり，$AA^*\xi = -\xi$．したがって，$\|A^*\xi\|^2 = -\|\xi\|^2$．左辺は非負，右辺は非正であるから，それらは 0 でなければならない．ゆえに，$\xi = 0$．同様に，$A^*A\eta = -\eta$ が導かれ，これから $\eta = 0$ が結論される．したがって，$v = 0$．ゆえに，$\mathrm{Ran}\,(M_A + i)^\perp = \{0\}$．同様に，$\mathrm{Ran}\,(M_A - i)^\perp = \{0\}$ が示される． □

定理 C-1 から，次の事実が得られる．

定理 C-2 (**von Neumann の定理**) A^*A は非負の自己共役作用素である．

証明 定理 C-1 によって，M_A^2 は自己共役作用素である．一方，作用素の等式

$$M_A^2 = \begin{pmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & AA^* \end{pmatrix} = A^*A \oplus AA^*$$

を示すのは難しくない．これは，$\mathrm{Ran}\,(M_A^2 \pm i) = \mathrm{Ran}\,(A^*A \pm i) \oplus \mathrm{Ran}\,(AA^* \pm i)$ を意味し，左辺は，$\mathscr{H}$ に等しいから，$\mathrm{Ran}\,(A^*A \pm i) = \mathscr{H}_1$, $\mathrm{Ran}\,(AA^* \pm i) = \mathscr{H}_2$ である．したがって，A^*A, AA^* は自己共役である[3)]．A^*A の非負性は容易に示される．
□

補題 C-3 A を $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ への稠密に定義された線形作用素，B を $\mathscr{H}_2$ から $\mathscr{H}_1$ への稠密に定義された線形作用素とし，作用素行列

$$M := \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad D(M) := D(A) \oplus D(B)$$

を考える．このとき，

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ B^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.3}$$

証明 $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in D(M^*)$ とすれば，任意の $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in D(M)$ (したがって，$\phi_1 \in D(A)$, $\phi_2 \in D(B)$) に対して，

[3)] 定理 2-9 の応用．

$$\langle M^*\psi, \phi\rangle = \langle \psi, M\phi\rangle = \langle \psi_1, B\phi_2\rangle + \langle \psi_2, A\phi_1\rangle.$$

特に，$\phi_2 = 0$ とすれば，

$$\langle (M^*\psi)_1, \phi_1\rangle = \langle \psi_2, A\phi_1\rangle.$$

これがすべての $\phi_1 \in D(A)$ に対して成り立つから，$\psi_2 \in D(A^*)$ かつ $A^*\psi_2 = (M^*\psi)_1$. 同様に，$\phi_1 = 0$ の場合を考えることにより，$\psi_1 \in D(B^*)$ かつ $B^*\psi_2 = (M^*\psi)_2$ がわかる．したがって，$\psi \in D(B^*) \oplus D(A^*)$. ゆえに，$D(M^*) \subset D(B^*) \oplus D(A^*)$.

逆に，$\psi \in D(B^*) \oplus D(A^*)$ とすれば，任意の $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in D(M)$ に対して，

$$\langle \psi, M\phi\rangle = \langle \psi_1, B\phi_2\rangle + \langle \psi_2, A\phi_1\rangle = \langle B^*\psi_1, \phi_2\rangle + \langle A^*\psi_2, \phi_1\rangle = \langle \eta, \phi\rangle.$$

ただし，$\eta := (A^*\psi_2,\ B^*\psi_1)$. これは，$\psi \in D(M^*)$ かつ $M^*\psi = \eta$ を意味する．よって，$D(M^*) = D(B^*) \oplus D(A^*)$ かつ (C.3) が成り立つ． □

定理 C-4　A, B, M を補題 C-3 のものとする．このとき，M が自己共役であるための必要十分条件は，A が閉であり，$A^* = B$ が成り立つことである．

証明　条件の十分性は，定理 C-1 による．そこで，必要性を示そう．すなわち，M は自己共役であるとする．このとき，$M^* = M$ であるから，補題 C-3 によって，$A = B^*$, $B = A^*$ でなければならない．これと共役作用素の閉性により，題意が成立する．
□

付 録 D

緩増加超関数

この付録では，緩増加超関数の定義を述べ，緩増加超関数に関する初歩的事項を簡単にまとめておく．

D-1 節　急減少関数の空間と緩増加超関数

D-1-1　定義と基本的事実

d 次元ユークリッド空間上の点を $x = (x_1, \cdots, x_d)$ $(x_j \in \mathbb{R})$ のように表し，変数 x_j に関する偏微分作用素を ∂_j と記す：

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

$\mathbb{R}^d$ 上の複素数値関数 f が $\mathbb{R}^d$ 上で無限回微分可能であり，任意の $m \in \mathbb{N}$ と $i_1, \cdots, i_d \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して，

$$|x|^m \partial_1^{i_1} \cdots \partial_d^{i_d} f(x) \longrightarrow 0, \quad |x| \longrightarrow \infty$$

をみたすとき，f は**急減少**であるという．$\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の全体を $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ で表す．この関数空間は，関数に関する，通常の和とスカラー倍について，無限次元複素ベクトル空間になる．

非負の整数の組

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d), \quad \alpha_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

は**多重指数** (multi-index) とよばれる．その大きさは

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$$

によって定義される．

各 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，非負整数 m と多重指数 α によって指定される量 $\|f\|_{m,\alpha}$ を

$$\|f\|_{m,\alpha} = \sup_{x\in\mathbf{R}^d}(1+|x|)^m|\partial^\alpha f(x)| \tag{D.1}$$

によって定義する．ただし，$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_d^{\alpha_d}$．この量が有限であることは容易にわかる．$\|\cdot\|_{m,\alpha}$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の 1 つのノルムである．ノルムの系 $\{\|\cdot\|_{m,\alpha}\}_{m,\alpha}$ を用いて，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に位相が導入される．すなわち，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ の列 $\{f_n\}_n$ が $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に収束するとは，すべての非負整数 m とすべての多重指数 α に対して，$\|f_n - f\|_{m,\alpha} \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ が成り立つことと定義するのである．このことを $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} f$ $(n \longrightarrow \infty)$ とも記す．

一般に，ベクトル空間 $\mathscr{V}$ から $\mathbb{C}$ への線形写像を $\mathscr{V}$ 上の**線形汎関数** (linear functional) という．

定義 D-1 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の連続な線形汎関数を $\mathbb{R}^d$ 上の**緩増加超関数** (tempered distribution) という．すなわち，ϕ が $\mathbb{R}^d$ 上の緩増加超関数であるとは，それが $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathbb{C}$ への写像であって，次の 2 つの条件をみたすときをいう：

(i)(線形性) $\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g)$ $(f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \lambda, \mu \in \mathbb{C})$.

(ii)(連続性) $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} f$ $(n \longrightarrow \infty)$ ならば，$\phi(f_n) \longrightarrow \phi(f)$ $(n \longrightarrow \infty)$.

緩増加超関数の全体を $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ または $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)^*$ と記す．

緩増加超関数の定義域としての関数空間 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ の各元を**試料関数** (test function) とよぶ．

緩増加超関数の空間 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ は，線形写像に関する，通常の和とスカラー倍について無限次元複素ベクトル空間になっている．

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数が緩増加超関数であるための必要十分条件は次の定理によってあたえられる．

定理 D-2 ϕ を $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数とする．このとき，$\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ であるための必要十分条件は，ある非負整数の有限個の組 $m_1, \cdots, m_n$ と多重指数の組 $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(n)}$ および定数 $C > 0$ が存在して，不等式

$$|\phi(f)| \le C \sum_{j=1}^{n} \|f\|_{m_j,\alpha^{(j)}}, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{D.2}$$

が成り立つことである．

証明　$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 ϕ が (D.2) をみたせば，ϕ は連続になるので，$\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ である．条件の必要性の証明は省略する[1)]．□

D-1-2　基本的な例

例 D-1　$\mathbb{R}^d$ 上の複素数値関数 u について，定数 C と $m \in \mathbb{N}$ が存在して $|u(x)| \le C(1+|x|)^m$ が成立するとき，u は**多項式的に有界**であるという．u をこのような関数とする．このとき，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，uf は可積分であり，したがって，写像 $\phi_u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\phi_u(f) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x)f(x)\,dx \tag{D.3}$$

によって定義することができる．$n > d\ (n \in \mathbb{N})$ とすれば，$D := \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{-n}\,dx < \infty$ であり，

$$\begin{aligned}|\phi_u(f)| &\le \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{-m}|u(x)|(1+|x|)^{m+n}|f(x)|(1+|x|)^{-n}\,dx \\ &\le CD\|f\|_{m,0}.\end{aligned}$$

したがって，$\phi_u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

例 D-2　$1 \le p < \infty$ に対して，

$$L^p(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C};\ \text{ボレル可測} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\,dx < \infty \right\}$$

とすれば，任意の $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対して，(D.3) によって定義される写像 ϕ_u は $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ の元である (ヘルダーの不等式を用いよ).

例 D-1, 例 D-2 のような場合，緩増加超関数 ϕ_u を関数 u と同一視して，$\phi_u\,(f) = u(f)$ という書き方をする．この意味で，多項式的に有界な関数の全体と $L^p(\mathbb{R}^d)$ は $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の部分集合である．

[1)] たとえば，Reed and Simon (1972) の p.129，Theorem V.2 を応用せよ．

一般の緩増加超関数 ϕ に対しても，$\phi(f)$ $(f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ を，しばしば，形式的に $\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f(x)\, dx$ のように表し，この表記におけるシンボル $\phi(x)$ を ϕ の**超関数核**という．上の例のように，超関数核は関数と同一視できる場合もあるが，一般にはそうではなく，単に表記上のシンボルの意味しかもたないことに注意されたい．

例 D-3　$a \in \mathbb{R}^d$ に対して，写像 $\delta_a : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\delta_a(f) := f(a), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{D.4}$$

とすれば，$|f(a)| \le \|f\|_{0,0}$ であるから，$\delta_a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ である．この緩増加超関数を，点 a における **Dirac のデルタ超関数**または単に**デルタ超関数**という．通常，δ_a の超関数核は $\delta(x-a)$ と書かれる．だが，これは関数としての意味をもたない[2]．δ_a を δ_a^d と書く場合もある．また，$\delta := \delta_0$ と記す．

例 D-4　$a \ge 0, m$ を実定数とする．$m = 0$ のときは，$d \ge 2$ の場合のみを考えることにする．このとき，$\mathbb{R}^{1+d} = \{x = (x_0, x) \,|\, x_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d\}$ 上の緩増加超関数 $\delta(x_0^2 - ax^2 - m^2)$ が

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{1+d}} \delta(x_0^2 - ax^2 - m^2) f(x_0, x)\, dx_0 dx \\
&:= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \int_{S^{d-1}} d\omega\, \frac{[f(\sqrt{ar^2+m^2}, r\omega) + f(-\sqrt{ar^2+m^2}, r\omega)] r^{d-1}}{\sqrt{ar^2+m^2}} \\
&\quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{1+d}),
\end{aligned}$$

によって定義される．ここで，$d\omega$ は $d-1$ 次元球面 $S^{d-1} := \{\omega \in \mathbb{R}^d \,|\, \omega^2 = 1\}$ の標準的な面積測度である $(dx = r^{d-1}\, dr d\omega)$.

例 D-5　写像 $\phi_0 : \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\phi_0(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x, x)\, dx, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{D.5}$$

によって定義する．任意の $m > d/2$ に対して，$C_m(f) := \sup_{x,y \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2 + |y|^2)^m |f(x,y)|$ とおけば，

$$|f(x,x)| = \frac{1}{(1+2|x|^2)^m} (1 + 2|x|^2)^m |f(x,x)|$$

---

[2] 歴史的な経緯により，物理学の文献では，$\delta(x-a)$ を，慣習的に，“デルタ関数” とよぶが，いまふれた理由により，これは適切でない．

$$\leq \frac{C_m(f)}{(1+2|x|^2)^m}$$

であり，$D_m := \int_{\mathbb{R}^d} (1+2|x|^2)^{-m}\,dx < \infty$ であるから，

$$|\phi_0(f)| \leq D_m C_m(f).$$

したがって，定理 D-2 によって，$\phi_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$．緩増加超関数 ϕ_0 の核を $\delta(x-y)$ で表す：

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \delta(x-y) f(x,y)\,dxdy := \phi_0(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,x)\,dx. \tag{D.6}$$

例 D-6　例 D-5 の一般化として，$F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{dn})$ と $p = 1, \cdots, n$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して，写像 $\phi_F^{(p)} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d(n+p)}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\phi_F^{(p)}(f) := \int_{\mathbb{R}^{dn}} F(x_1, \cdots, x_n) f(x_1, \cdots, x_n, x_{i_1}, \cdots, x_{i_p})\,dx_1 \cdots dx_n,$$

$$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d(n+p)}), \tag{D.7}$$

によって定義する．ここで，$\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\} \subset \{x_1, \cdots, x_n\}$ であり，$j \neq k$ ならば，$i_j \neq i_k$ とする．もちろん，右辺は，関数

$$g_f(x_1, \cdots, x_n) := f(x_1, \cdots, x_n, x_{i_1}, \cdots, x_{i_p})$$

に対する F の値 $F(g_f)$ の象徴的記法である ($g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{dn})$ となることを示すのは難しくない)．対応：$f \longrightarrow g_f$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{d(n+p)})$ の位相で連続である．したがって，$\phi_F^{(p)} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d(n+p)})$．この緩増加超関数の核を

$$F(x_1, \cdots, x_n)\delta(x_{n+1} - x_{i_1}) \cdots \delta(x_{n+p} - x_{i_p})$$

と記す：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{d(n+p)}} F(x_1, \cdots, x_n)\delta(x_{n+1} - x_{i_1}) \cdots \delta(x_{n+p} - x_{i_p})\,dx_1 \cdots dx_{n+p} \\
&:= \phi_F^{(p)}(f) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{dn}} F(x_1, \cdots, x_n) f(x_1, \cdots, x_n, x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}) dx_1 \cdots dx_n, \\
&\quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d(n+p)}).
\end{aligned} \tag{D.8}$$

例 D-7　$\mathbb{R}^d$ 上の 2 次多項式

$$P(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_d^2$$

を考えよう ($p \le d$). $\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$ をみたす任意の複素数 λ に対して，$P_+^\lambda : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$P_+^\lambda(f) := \int_{P(x)>0} P(x)^\lambda f(x)\,dx, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

によって定義する．集合 $\{x \in \mathbb{R}^d \,|\, P(x) > 0\}$ の定義関数を χ_{P_+} とすれば，$\chi_{P_+} P^\lambda$ は多項式的に有界な関数であるから，例 D-1 によって，$P_+^\lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ である．また，$P_+^\lambda(f)$ は λ について解析的である．さらに，詳細は割愛するが，P_+^λ は，緩増加超関数として，λ について，全複素平面に解析接続でき，可能な極の集合は，$\{-n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ と $\{-(d/2) - j \,|\, j \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ であることが知られる[3]．解析接続して得られる超関数も P_+^λ と記す．

D-1-3 超関数の共役

$\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\phi^* : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\phi^*(f) := \phi(f^*)^*$$

によって定義する．容易にわかるように，$\phi^* \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ である．この緩増加超関数を ϕ の**共役** (conjugation) とよぶ．ϕ^* の超関数核を $\phi(x)^*$ と記す．

$\phi^* = \phi$ をみたす緩増加超関数 ϕ は**実** (real) であるという．

例 D-1 の超関数 ϕ_u は，u が実数値関数ならば，実超関数である．

デルタ超関数 δ_a は実である．

D-1-4 超関数の変数変換

$T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を正則な線形変換で $|\det T| = 1$ となるものとし，$a \in \mathbb{R}^d$ とする．$\mathbb{R}^d$ 上の関数 f に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の関数 $f_{(a,T)}$ を

$$f_{(a,T)}(x) := f(T^{-1}(x-a))$$

によって定義する．$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ならば $f_{(a,T)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ であることは容易に示される．写像 $\phi_{(a,T)} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\phi_{(a,T)}(f) := \phi(f_{(a,T)})$$

[3] Gel'fand and Shilov (1964) の 3 章，§2.2, pp.253～255 を参照.

によって定義すれば，$\phi_{(a,T)} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ であることがわかる．この超関数 $\phi_{(a,T)}$ の超関数核を $\phi(Tx+a)$ と記す．

$\phi_{(a,I)}$ ($T=I$ の場合) は ϕ の (ベクトル a による) 並進とよばれる．

また，$\phi_{(0,-I)}$ ($a=0, T=-I$ の場合) は ϕ の**空間反転**とよばれる．

D-2 節　緩増加超関数の空間の位相

$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の点列 $\{\phi_n\}_n$ が $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ にに収束することを

$$\phi_n(f) \longrightarrow \phi(f), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

によって定義し，これを $\phi_n \xrightarrow{\mathscr{S}'} \phi \ (n \longrightarrow \infty)$ とも記す．これによって，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ に位相が導入され，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ は位相ベクトル空間になる[4)]．

例 D-8　$L^1(\mathbb{R}^d)$ の元 v で

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x)\,dx = 1$$

をみたすものを任意にとり，$a \in \mathbb{R}^d$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$v_n(x) := n^d v(n(x-a))$$

を定義する．このとき，

$$v_n \xrightarrow{\mathscr{S}'} \delta_a, \quad n \longrightarrow \infty.$$

実際，変数変換により，

$$v_n(f) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x) f\left(a + \frac{x}{n}\right) dx, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

a.e.x に対して，$\lim_{n\to\infty} v(x) f\left(a+\frac{x}{n}\right) = v(x)f(a)$．また，$\left|v(x)f\left(a+\frac{x}{n}\right)\right| \le |v(x)| \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |f(y)|$ で右辺は可積分．したがって，ルベーグの優収束定理により，

$$\lim_{n\to\infty} v_n(f) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x) f(a)\,dx = f(a) = \delta_a(f).$$

例 D-9　$P(x) = \sum_{r,s=1}^{d} a_{rs} x_r x_s$ を $\mathbb{R}^d$ 上の実 2 次形式とする (a_{rs} は実定数)．このと

---

4) **位相ベクトル空間** (topological vector space) とは，位相 (トポロジー) の入ったベクトル空間のことである．

き，任意の定数 $c \in \mathbb{R}$ $(c \neq 0)$ と複素数 λ に対して，緩増加超関数 $(c^2 + P \pm i0)^\lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ が

$$(c^2 + P \pm i0)^\lambda := \lim_{\varepsilon \downarrow 0}(c^2 + P \pm i\varepsilon P_1)^\lambda$$

によって定義される．ここで，P_1 は正定値の 2 次形式であり，収束は $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の収束の意味でとる．詳しくは，Gel'fand and Shilov (1964a) の 3 章，§2.4∼ 2.8 を参照．

$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の点列 $\{\phi_n\}_n$ について，すべての $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\{\phi_n(f)\}_n$ が $\mathbb{C}$ のコーシー列であるとき，$\{\phi_n\}_n$ を $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の**コーシー列**あるいは**基本列**という．

定理 D-3　$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の任意のコーシー列は収束列である．すなわち，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の任意の列 $\{\phi_n\}_n$ に対して，$\phi_n \xrightarrow{\mathscr{S}'} \phi$ となる $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ が存在する．

この定理に述べられた性質は $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の**完備性**とよばれる．

D-3 節　シュヴァルツの核定理

$n \geq 2$, $d_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \cdots, 2)$ とし，F を直積空間

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_1}) \times \cdots \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_n})$$

上の n 重線形汎関数とする (1 章，1-1 節，注意 1-2 を参照)．各 $j = 1, \cdots, n$ に対して，$f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_k})$ $(k \neq j)$ を任意に固定するとき，対応 $f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_j}) \longrightarrow F(f_1, \cdots, f_j, \cdots f_n)$ が $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_j})$ の位相で連続であるとき，F は**分離連続** (separately continuous) であるという．

次の定理は分離連続な n 重線形汎関数の拡大に関する重要な定理である．

定理 D-4　**(シュヴァルツの核定理)**　$n \geq 2$ とし，F を $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_1}) \times \cdots \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_n})$ 上の分離連続な n 重線形汎関数とする．このとき，緩増加超関数 $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d_1 + \cdots + d_n})$ で，任意の $f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_j})$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，

$$T(f_1 \times \cdots \times f_n) = F(f_1, \cdots, f_n)$$

となるものがただ 1 つ存在する．

この定理の証明については，Reed and Simon (1972) の TheoremV.12 等を参照されたい．

例 D-10　$f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$F(f,g) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,dx$$

とすれば，例 D-1 により，これは，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の分離連続な双線形汎関数をあたえる．したがって，シュヴァルツの核定理により，$T(f \times g) = F(f,g)$ となる $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ がただ 1 つ存在する．この緩増加超関数を δ_{diag} と記す：

$$\delta_{\text{diag}}(f \times g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,dx. \tag{D.9}$$

例 D-5 の緩増加超関数 ϕ_0 は，$\phi_0(f \times g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,dx$ をみたす．したがって，$\delta_{\text{diag}} = \phi_0$ である．

D-4 節　緩増加超関数の微分

任意の多重指数 α と $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 $D^\alpha\phi$ を

$$(D^\alpha\phi)(f) := (-1)^{|\alpha|}\phi(\partial^\alpha f), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{D.10}$$

によって定義する．$f_n, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} f$ $(n \longrightarrow \infty)$ ならば，$\partial^\alpha f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} \partial^\alpha f$ $(n \longrightarrow \infty)$ であるから，$D^\alpha\phi$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ の位相で連続である．すなわち，$D^\alpha\phi$ は緩増加超関数である．$D^\alpha\phi$ を，ϕ に対する $|\alpha|$ 階の**超関数の意味での偏導関数**あるいは**導超関数**とよぶ．対応 $D^\alpha : \phi \longrightarrow D^\alpha\phi$ $(\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ は $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ からそれ自身への線形写像を定める．この写像 D^α を $|\alpha|$ 階の**超関数の意味での偏微分作用素**または **$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 上の偏微分作用素**という．

特に，$\alpha = (0, \cdots, 0, \alpha_j, 0, \cdots, 0)$ (j 成分以外は 0) の場合，

$$D^\alpha = D_j^{\alpha_j} \tag{D.11}$$

と記す．このとき，任意の多重指数 α に対して

$$D^\alpha\phi = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}\phi, \quad \phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d), \tag{D.12}$$

が成り立つ．ここで，右辺の偏微分作用素の順序は任意でよい．

容易にわかるように，$\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ が微分可能な関数であれば，その導超関数は対応する同じ階数の偏導関数と一致する．

例 D-11　$x \geq 0$ ならば，$\theta(x) := 1$，$x < 0$ ならば，$\theta(x) := 0$ である関数 θ を

Heaviside (ヘヴィサイド) 関数という．これは有界な関数であるから，例 D-1 によって，$\mathbb{R}$ 上の緩増加超関数である．任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して，

$$D\theta(f) = -\theta(f') = -\int_0^\infty f'(x)\,dx = f(0) = \delta(f).$$

したがって，$D\theta = \delta$．これを象徴的に，$D\theta(x) = \theta'(x) = \delta(x)$ と書く．

D-5 節　関数と緩増加超関数の積

$\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, u を $\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数で多項式的に有界なものとする．このとき，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$uf \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ であり，対応：$f \longrightarrow uf$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ の位相で連続である．したがって，写像：$f \longrightarrow \phi(uf)$ は緩増加超関数である．この緩増加超関数を $u\phi$ と記し，u と ϕ の**積**という：

$$(u\phi)(f) := \phi(uf).$$

D-6 節　フーリエ変換

$\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 $\hat{\phi}$ を

$$\hat{\phi}(f) = \phi(\hat{f}), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{D.13}$$

によって定義する．ただし，

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ikx}\,dx \tag{D.14}$$

は f のフーリエ変換である ($kx := \sum_{j=1}^{d} k_j x_j$ は k と x のユークリッド内積)．$\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ であるから，$\hat{\phi}$ は確かに $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数である．$f_n \stackrel{\mathscr{S}}{\longrightarrow} f$ $(n \longrightarrow \infty)$ ならば，$\hat{f}_n \stackrel{\mathscr{S}}{\longrightarrow} \hat{f}$ $(n \longrightarrow \infty)$ を示すのは難しくない．したがって，$\hat{\phi}(f_n) \longrightarrow \hat{\phi}(f)$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる．ゆえに，$\hat{\phi}$ は連続である．よって，$\hat{\phi} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$．この緩増加超関数 $\hat{\phi}$ を ϕ の**フーリエ変換**といい，対応 $\phi \longrightarrow \hat{\phi}$ によって定まる，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ から $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ への写像を $\mathscr{F}$ と記す：

$$\mathscr{F}\phi := \hat{\phi}, \quad \phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d). \tag{D.15}$$

この写像 $\mathscr{F}$ を $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換という．

定理 D-5　フーリエ変換 $\mathscr{F}$ は $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ からそれ自身への全単射であり，連続線形写像である．

この定理によって，その存在が保証される，$\mathscr{F}$ の逆写像 $\mathscr{F}^{-1}$ を $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 上の**逆フーリエ変換**という．$\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の逆フーリエ変換を $\check{\phi}$ と記す．このとき，

$$\check{\phi}(f) = \phi(\check{f}), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{D.16}$$

例 D-12　デルタ超関数のフーリエ変換　$a \in \mathbb{R}^d$ とする．任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\hat{\delta}_a(f) = \delta_a(\hat{f}) = \hat{f}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(k) e^{-iak}\, dk.$$

したがって，$\hat{\delta}_a$ は関数と同一視できて，

$$\hat{\delta}_a(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-iak}. \tag{D.17}$$

任意の $R > 0$ に対して，

$$u_R(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|k_i| \le R; i=1,\cdots,d} e^{ik(x-a)}\, dk$$

とおく．このとき，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned} u_R(f) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|k_i| \le R; i=1,\cdots,d} \check{f}(k) e^{-ika}\, dk \\ &\xrightarrow{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \check{f}(k) e^{-ika}\, dk \\ &= f(a) = \delta_a(f). \end{aligned}$$

したがって，$u_R \xrightarrow{\mathscr{S}'} \delta_a$ $(R \longrightarrow \infty)$．この意味で，

$$\delta_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ik(x-a)}\, dk \tag{D.18}$$

と象徴的に記す．

D-7 節　合成積

D-7-1　急減少関数の合成積

$f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，関数 $f * g$ を

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$$

によって定義する．これを f と g の**合成積** (convolution) という．容易にわかるように，$f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ である．次の事実を証明するのは難しくない[5)]：

(C.1)　各 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，対応 $g \longrightarrow f * g$ は，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ への連続写像である．

(C.2)　$\widehat{fg} = (2\pi)^{-d/2}\hat{f} * \hat{g}$.

(C.3)　$\widehat{f * g} = (2\pi)^{d/2}\hat{f}\hat{g}$.

(C.4)　任意の $f, g, h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h.$$

D-7-2　急減少関数と緩増加超関数の合成積

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ とし，$\tilde{f}(x) := f(-x)$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ とする．上述の特性 (C.1) によって，

$$(\phi * f)(g) := \phi(\tilde{f} * g), \quad g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

によって定義される写像 $\phi * f : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ は線形かつ連続である．すなわち，$\phi * f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$．この緩増加超関数 $\phi * f$ を ϕ と f の**合成積**という．これは，前項の合成積の概念の拡張である．

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ と $y \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の関数 $\tilde{f}_y$ を

$$\tilde{f}_y(x) := f(y-x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

によって定義する．次の定理が成り立つ[6)]

定理 D-6　各 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，写像：$\phi \longrightarrow \phi * f$ $(\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ は $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ から $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ への連続な写像である．さらに，次が成り立つ ($\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ は任意)：

---

5) たとえば，Reed and Simon (1975) の p.6，Theorem IX.3 を参照.

6) たとえば，Reed and Simon (1975) の p.7，Theorem IX.4 を参照.

(i) $\phi * f$ は多項式的に有界かつ無限回微分可能な関数であり，

$$(\phi * f)(y) = \phi(\tilde{f}_y)$$

および任意の多重指数 α に対して

$$D^\alpha(\phi * f) = (D^\alpha \phi) * f = \phi * D^\alpha f$$

が成立する．

(ii) $(\phi * f) * g = \phi * (f * g)$.

(iii) $\widehat{\phi * f} = (2\pi)^{d/2} \hat{f}\hat{\phi}$.

D-7-3 応用：偏微分作用素の基本解

$P(x)$ を d 変数 $x = (x_1, \cdots, x_d)$ の多項式とし，$P(x)$ において，x_j を D_j で置き換えて得られる偏微分作用素を $P(D)$ とする：

$$P(D) := P(D_1, \cdots, D_d).$$

このとき，超関数方程式

$$P(D)E = \delta$$

をみたす超関数 $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ を $P(D)$ に対する**基本解** (fundamental solution) という (δ は d 次元のデルタ超関数)．言い換えれば，$E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ が $P(D)$ に対する基本解であるとは，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$E(P(-D)f) = f(0)$$

が成り立つということである．ここで，$P(-D) := P(-D_1, \cdots, -D_d)$.

注意 D-1 $P(D)$ に対する基本解は一意的には決まらない．たとえば，E を $P(D)$ に対する基本解とすれば，$P(D)u = 0$ となる任意の解 $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対して，$E + u$ も基本解である．以下の例 D-13 も参照.

命題 D-7 $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ を $P(D)$ に対する基本解としよう．このとき，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$u = E * f$ は多項式的に有界かつ無限回微分可能な関数であり，微分方程式

$$P(D)u = f$$

をみたす．

証明 主張の前半は，定理 D-6 (i) による．また，定理 D-6 (i) により，

$$P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f.$$

ゆえに題意が成立する． □

例 D-13 例 D-11 により，Heaviside 関数 $\theta(x)$ は D に対する基本解である．また，

$$\eta(x) := \frac{\theta(x) - \theta(-x)}{2}$$

とおけば，$D\eta = \delta$ となるので，η も D に対する基本解である．

例 D-14 3 次元ラプラシアン $\Delta := D_1^2 + D_2^2 + D_3^2$ に対する基本解の 1 つとして，超関数 $-(4\pi|\boldsymbol{x}|)^{-1}$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$) がある[7]：

$$-\Delta \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|} = \delta(\boldsymbol{x}).$$

したがって，$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ に対して，

$$u(\boldsymbol{x}) := -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

は **Poisson (ポアッソン) の方程式**

$$\Delta u = f$$

の解である．

---

[7] 証明については，たとえば，Reeed and Simon(1975) の p.46 にある Example を参照．

索　引

1 巻は p.1～ p.314, 2 巻はそれ以降.

●た行

●な行

●は行

●ま行

●や行

●ら行

新井朝雄 (あらい・あさお)

略歴

1954 年　埼玉県に生まれる

1976 年　千葉大学理学部物理学科を卒業

現　在　北海道大学大学院理学研究科数学専攻教授．理学博士．

著書に

『場の量子論と統計力学』(日本評論社，共著)

『対称性の数理』(日本評論社)

『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版)

『量子力学の数学的構造』1, 2 (共著，朝倉書店)

フォック空間と量子場 (上)　　数理物理シリーズ

2000 年 8 月 10 日　第 1 版第 1 刷発行

著　者　新 井 朝 雄

発行者　大 石 進

発行所　株式会社 日 本 評 論 社

〒170-8474 東京都豊島区南大塚 3-12-4

電話 (03) 3987-8621 [販売]

(03) 3987-8599 [編集]

印　刷　藤原印刷株式会社

製　本　牧製本印刷株式会社

ISBN 4-535-78317-9